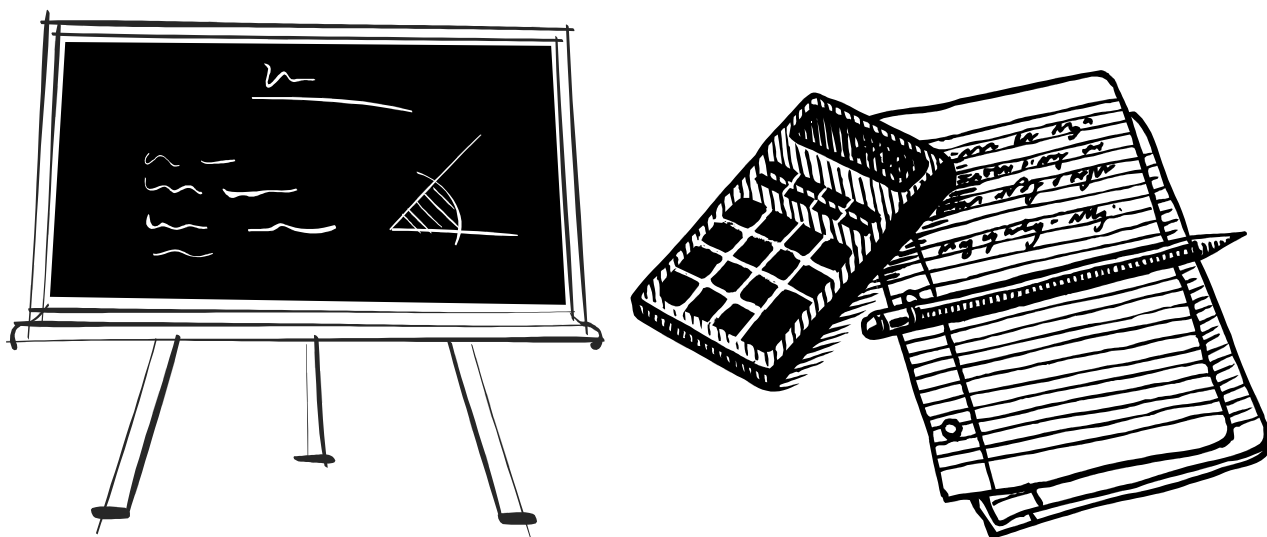




MECHANIKA I. - STATIKA

BSc-s hallgatók számára



MECHANIKA I. - STATIKA

Tankönyv és jegyzet BSc-s hallgatók részére

© **Dr. Galambosi Frigyes**

Mechanika I. Statika tankönyv és jegyzet
BSc-s hallgatók részére

Írta és szerkesztette: **Dr. Galambosi Frigyes és Sándor Zsolt Péter**

Tördelte: **Sándor Zsolt**

Rajzoló: **Cseke Péter Tíqulo, Diviaczky Márk, Sándor Zsolt Péter**

Felelős kiadó:

Felelős vezető:

Márpedig hibák olykor előfordulhatnak. Erre való tekintettel létrehoztunk egy e-mail címet, ahol a könyvvel kapcsolatos hibákat jelezhetik, hogy az újabb kiadások alkalmával ezek már javítva jelenhessenek meg. Továbbá ugyanitt várjuk a könyvvel kapcsolatos észrevételeiket is.

mechanikaBME@gmail.com

Budapest, 2011. január

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	- 5 -
I.) MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ	- 6 -
1.) MÁTRIX SZÁMÍTÁS ALAPJAI	- 6 -
1.1.) Mátrixok összeadása és kivonása	- 6 -
1.2.) Mátrixok szorzása skalár számmal	- 7 -
1.3.) Mátrix szorzása mátrixszal	- 7 -
1.4.) Mátrixok determinánsa	- 8 -
2.) VEKTORSZÁMÍTÁS ALAPJAI	- 9 -
2.1.) A vektoralgebra koordinátamentes értelmezése	- 9 -
2.1.1.) Vektorok fogalma és jelölése	- 9 -
2.1.2.) Alapfogalmak	- 10 -
2.1.3.) Műveletek vektorokkal	- 10 -
2.2.) A vektor algebra koordinátás értelmezése	- 14 -
2.2.1.) A vektor koordinátás értelmezése	- 14 -
2.2.2.) Műveletek vektorokkal	- 15 -
3.) A TENZOR	- 17 -
3.1.) A tenzor fogalma	- 17 -
3.2.) SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR	- 19 -
4.) PÉLDÁK A MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ TÉMAKÖRBŐL	- 21 -
II.) ERŐRENDSZEREK	- 28 -
1.) ALAPFOGALMAK	- 28 -
1.1.) Erő	- 28 -
1.2.) Pontra számított nyomaték	- 29 -
1.3.) Erőpár, koncentrált nyomaték	- 29 -
1.4.) Tengelyre számított nyomaték	- 30 -
1.5.) Erőrendszer redukálása	- 31 -
1.6.) Kényszerek	- 32 -
2.) ERŐRENDSZEREK OSZTÁLYOZÁSA	- 34 -
3.) EGYENSÚLYI ERŐRENDSZEREK	- 37 -
4.) PÉLDÁK AZ ERŐRENDSZEREK TÉMAKÖRBŐL	- 40 -
III.) IGÉNYBEVÉTEL	- 72 -
1.) KONCENTRÁLT ERŐKEL TERHELT TARTÓ	- 74 -
2.) KONCENTRÁLT NYOMATÉKKAL TERHELT TARTÓ	- 75 -
3.) MEGOSZLÓ ERŐRENDSZERREL TERHELT TARTÓ	- 75 -
4.) MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY RAJZOLÁSA	- 77 -
5.) ÖSSZEFÜGGÉS A HAJLÍTÓNYOMATÉKI ÉS NYÍRÓERŐ FÜGGVÉNYEK KÖZÖTT	- 78 -
6.) PÉLDÁK AZ IGÉNYBEVÉTELEK TÉMAKÖRBŐL	- 79 -
IV.) PÁRHUZAMOS ERŐRENDSZEREK	- 102 -
1.) KONCENTRÁLT ERŐKBŐL ÁLLÓ PÁRHUZAMOS ERŐRENDSZER	- 102 -
2.) MEGOSZLÓ ERŐRENDSZER (SÍKBAN)	- 103 -
3.) SÚLYPONT, TÖMEGKÖZÉPPONT ÉS GEOMETRIAI KÖZÉPPONT	- 104 -
4.) VONALAK SÚLYPONTJA	- 105 -
5.) SÍKIDOMOK SÚLYPONTJA	- 105 -
6.) PÉLDÁK A PÁRHUZAMOS ERŐRENDSZEREK TÉMAKÖRBŐL	- 106 -

V.) MÁSODRENDŰ NYOMATÉK	- 110 -
1.) A MÁSODRENDŰ NYOMATÉK ÉRTELMEZÉSE	- 110 -
2.) MÁSODRENDŰ NYOMATÉK AZ XYZ DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTARENDSZERBEN.....	- 111 -
3.) SÍKIDOMOK MÁSODRENDŰ NYOMATÉKA.....	- 113 -
4.) KOORDINÁTARENDSZER FORGATÁSA.....	- 114 -
5.) KOORDINÁTARENDSZER PÁRHUZAMOS ELTOLÁSA.....	- 115 -
6.) FŐMÁSODRENDŰ NYOMATÉK ÉS FŐIRÁNY	- 116 -
7.) NÉHÁNY SÍKIDOM MÁSODRENDŰ NYOMATÉKA	- 118 -
8.) PÉLDÁK A MÁSODRENDŰ NYOMATÉK TÉMAKÖRBŐL	- 119 -
VI.) RÁCSOS SZERKEZETEK	- 134 -
1.) SÍKBELI RÁCSOS SZERKEZET ÉRTELMEZÉSE.....	- 134 -
2.) RÚDERŐK MEGHATÁROZÁSA CSOMÓPONTI MÓDSZERREL.....	- 135 -
3.) HÁROMRUDAS ÁTMETSZŐ MÓDSZER.....	- 138 -
4.) „K” RÁCSOZÁSÚ TARTÓK SZÁMÍTÁSA	- 140 -
5.) PÉLDÁK A RÁCSOS SZERKEZETEK TÉMAKÖRBŐL	- 142 -
VII.) SÚRLÓDÁS	- 149 -
1.) A SÚRLÓDÁS FIZIKAI ÉRTELMEZÉSE.....	- 149 -
2.) GÖRDÜLÉSI ELLENÁLLÁS.....	- 151 -
3.) KÖTÉLSÚRLÓDÁS	- 153 -
4.) CSAPSÚRLÓDÁS	- 154 -
5.) PÉLDÁK A SÚRLÓDÁS TÉMAKÖRBŐL	- 155 -

Bevezetés

Tisztelt Olvasó / Kedves Hallgató!

Ezen egyetemi jegyzet a mechanika, azon belül a statika tudományával foglalkozik. Nem titkolt célja, hogy segítséget nyújtson azoknak a hallgatóknak, akiknek szándékában áll az e tudományág jelentette fontos ismeretanyag alapjait megismerni és elsajátítani, ami további tanulmányaik hasznos, sőt elengedhetetlen pillére lehet.

A könyv az alapoktól kezdve dolgozza fel a témát; a téma megértéséhez szükséges matematikai háttér az első fejezetben fellelhető összefoglaló ismerteti.

A tananyag elsajátítását a fejezetek célszerű felépítése hivatott támogatni. Minden témakör esetében az elméleti bevezetőt több részletesen kidolgozott példa követi, melyeket a megértés elősegítése végett igyekeztünk minél több ábrával illusztrálni. Mindezen felül gyakorló példák is találhatóak a könyvben, melyeknél csak a kiindulási adatokat és a végeredményeket közöltük. Ezeket önálló megoldás céljára szánjuk.

Tapasztalatainkból kiindulva azt ajánljuk, hogy a tanulás során is a fejezetek struktúráját kövessék: az elmélet és a feladatok megoldásának szokásos menetének áttekintését követően ne mulasszanak el néhány példát saját maguk megoldani, hiszen mindez nagy segítség lehet a tantárgy számonkéréseire való felkészülésben. Az így szerzett tapasztalat és gyakorlottság pótolhatatlan.

Könyvünket hiánypótlónak szánjuk a hallgatóbarát statikakönyvek területén, így az írás során elsődleges volt az a szempont, hogy a hallgatók könnyen használható, logikus és lényegre törő segédletet kapjanak tanulmányaik során. Öszintén reméljük, hogy a tanulók hasznosnak ítélik meg a könyvet, és segítségével még sikeresebben lesznek képesek ismereteik részévé tenni e nagyszerű tudományt.

Miként a témakör egyik népszerű oktatója gyakorta említette:

„A társadalomtudományokkal szemben a statika tudománya független a politikai rendszerek változásától, így aki egyszer elsajátítja, azt már nem érheti meglepetés.”

Budapest, 2009

A szerzők

I.) Matematikai összefoglaló

1.) Mátrix számítás alapjai

Definíció: A számok egy bizonyos alakba történő elrendezését mátrixnak nevezzük.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A mátrix elemeit indexszel látjuk el, ami megmutatja, hogy az adott elem a mátrix mely sorában, illetve oszlopában helyezkedik el. Első szám a sorindex, a második az oszlopindex.

A mátrixoknak több jelölési módja terjedt el. Például: nagybetű kétszer föléhúzva $\overline{\overline{A}}$, kétszer aláhúzva $\underline{\underline{A}}$, vagy nyomtatásban a vastag nagybetű **A**, esetleg $[a_{ij}]$ alakú. Ezen felül szokás indexekkel jelölni a mátrix terjedelmét.

Például: $\overline{\overline{A}}_{m \times n}$.

Ebben a könyvben a mátrixokat vékony betűvel és két fölévonással fogjuk jelölni: $\overline{\overline{A}}_{m \times n}$

Speciális mátrixok:

- Négyzetes mátrix: A mátrix sorainak és oszlopainak száma megegyezik. ($m=n$)
- Sormátrix: A mátrixnak egyetlen sora van. ($1 \times n$)
- Oszlopmátrix: A mátrixnak egy oszlopa van ($m \times 1$)

A mátrixok azon elemei, melyek sorindexe egyenlő az oszlopindexével, alkotják a mátrix főátlóját. Például: 2×2 mátrixban az a_{11} és a_{22} elemek.

1.1.) Mátrixok összeadása és kivonása

Ezek a műveletek csak azonos méretű mátrixok között értelmezhetők.

Adott $\overline{\overline{A}}_{m \times n}$ melynek elemei a_{ij} és $\overline{\overline{B}}_{m \times n}$, melynek elemei b_{ij} . Az összeadás és kivonás műveletét az alábbiak szerint értelmezzük: $\overline{\overline{C}}_{ij} = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

illetve kivonásnál: $\overline{\overline{D}}_{ij} = (\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}})_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Vagyis az eredménymátrix ij elemét úgy kapjuk meg, hogy a műveletben szereplő mátrixok ij elemeit a műveletnek megfelelően összeadjuk, vagy kivonjuk.

Példa: Adjuk össze az alábbi 2×2 -as mátrixokat.

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = ?$$

Megoldás: A megfelelő helyen lévő elemeket összeadjuk. Tehát $4 + 7 = 11$, $8 + 1 = 9$ és így tovább.

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2.) Mátrixok szorzása skalár számmal

Adott $\overline{\overline{A}} = [a_{ij}]$ és λ egy skalár szám. Ekkor $\lambda \cdot \overline{\overline{A}} = [\lambda \cdot a_{ij}]$, vagyis egy mátrix szorzását λ számmal úgy hajtjuk végre, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk a skalár számmal.

Példa: Szorozzuk meg az alábbi 2×2 -es mátrixot kettővel.

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} * 2 = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

1.3.) Mátrix szorzása mátrixszal

Két mátrixot csak akkor lehet összeszorozni, a szorzás sorrendjét is figyelembe véve, ha az első tényező oszlopainak száma megegyezik a második tényező sorainak számával.

$$\overline{\overline{A}}_{n \times m} \cdot \overline{\overline{B}}_{m \times k} = \overline{\overline{C}}_{n \times k}$$

Ekkor a végeredmény mátrix sorszáma az első tényező sorszáma, az oszlopszáma, pedig a második tényező oszlopszáma lesz egyenlő.

Négyzetes mátrixok szorzásakor a végeredmény mátrix is négyzetes mátrix lesz, melynek sor és oszlopszáma megegyezik a tényezőkével.

A mátrix szorzás egy speciális esete, ha sormátrixot oszlopmátrixszal szorzunk. Ebben az esetben, ugyanis a végeredmény egy 1×1 -es mátrix lesz.

$$\text{Legyen } \overline{\overline{A}}_{1 \times n} = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}] \text{ és } \overline{\overline{B}}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

A szorzás $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}}$ eredménye tehát egyetlen szám lesz, melynek értéke a következőképpen alakul:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1}$$

Általános mátrixok szorzása:

Legyen $\overline{\overline{A}}_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ és $\overline{\overline{B}}_{n \times k} = [b_{ij}]_{n \times k}$

$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}_{m \times n} \cdot \overline{\overline{B}}_{n \times k} = \overline{\overline{C}}_{m \times k}$

A $\overline{\overline{C}}_{m \times k}$ mátrix elemei:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Tehát az eredménymátrix elemeit úgy kapjuk, hogy az $\overline{\overline{A}}$ mátrix minden sorát megszorozzuk a $\overline{\overline{B}}$ mátrix minden oszlopával.

A sor, oszlop kombinációban végrehajtandó szorzást a speciális sormátrix oszlop mátrixszal való szorzás szabályai szerint hajtjuk végre.

1.4.) Mátrixok determinánsa

Legyen adva egy négyzetes mátrix. Ennek a mátrixnak a determinánsa egy szám melynek értékét a mátrixot alkotó elemekből, meghatározott műveleti szabályok szerint számítjuk ki.

A determináns jelölése: $\det(\overline{\overline{A}}) = |\overline{\overline{A}}|$.

A 2×2 -es mátrix determinánsát az alábbi eljárással határozzuk meg:

$$\det(\overline{\overline{A}}) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Vagyis a főátlóbeli elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóbeli elemek szorzatát.

Tekintsük az alábbi 3×3 -as mátrixot:

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Válasszuk ki a mátrix valamely elemét és hagyjuk el a kiválasztott elem sorát és oszlopát. Így egy kisebb méretű (jelenleg 2×2 -es) mátrixot kapunk, melynek determinánsa az előzőek szerint számítható. Ezt a determinánst a kiválasztott elemhez tartozó aldeterminánsnak nevezzük. Ha kiválasztottuk az a_{22} elemet, akkor a hozzá tartozó aldetermináns:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$

Ha az aldeterminánst megszorozzuk még $(-1)^{i+j}$ - vel nyerjük a a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst, más néven az adjungáltat.

Az a_{22} elemhez tartozó adjungált tehát a következő:

$$(-1)^{2+2} \cdot (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) = +(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}).$$

Az adjungált előjele az úgynevezett „sakktábla” szabály szerint is meghatározható. Ilyenkor a mátrix első eleme (bal felső) pozitív, a többi elem előjele az elsőhöz képest felváltva követi egymást.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

A mátrix determinánsát a következő módon számítjuk ki. Válasszunk ki a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát. A kiválasztott sor vagy oszlop minden elemét megszorozzuk az adjungáltjával és az így nyert szorzatokat előjelhelyesen összegezzük.

Első sor szerinti kifejtés:

$$\det(\overline{\overline{A}}) = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

A determináns kiszámítása sok esetben egyszerűsödik, ha kihasználjuk a determinánsok néhány tulajdonságát:

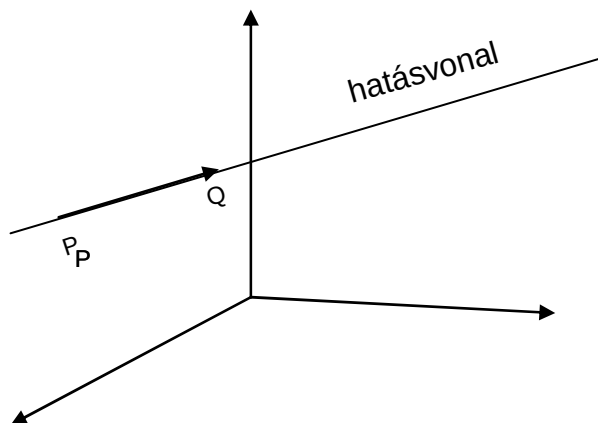
- Ha a determináns két sorát vagy oszlopát felcseréljük, akkor értéke előjelet vált.
- Ha a determináns két sora vagy oszlopa megegyezik, akkor az értéke nulla lesz.
- Ha a determináns valamelyik sorának vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk egy tetszőleges λ számmal, akkor a determináns értéke is λ -szorosára változik.

A determináns kiszámítását célszerű olyan sor vagy oszlop szerint kifejtetni, amelyben sok nulla értékű elem található. Ekkor ugyanis csak a nem zérus elemekhez tartozó al-determinánsok kiszámítását kell elvégezni.

2.) Vektorszámítás alapjai

2.1.) A vektoralgebra koordinátamentes értelmezése

2.1.1.) Vektorok fogalma és jelölése



Az olyan mennyiségeket, amelyeknek nemcsak nagysága hanem iránya is van, vektoroknak nevezzük. A tér egy P pontjából a Q pontba mutató vektort a PQ egyenes darab hossza (nagysága), a térbeli helyzete (állása), és iránya (értelme) határozza meg.

A térbeli helyzetet (állást) és az irányt (értelmet) összefoglalóan csak iránynak is nevezik. A vektoros jelölése: $\overline{PQ}$, $\vec{a}$, $\mathbf{a}$.

Kétféle vektort értelmezünk:

- Szabad vektor: melynek kezdőpontja (támadáspontja) a tér tetszőleges pontjába helyezhető.
- Kötött vektor: melynek támadáspontja a tér egy meghatározott pontja.

Két kötött vektor akkor egyenlő, ha kezdő és végpontja megegyezik.

Két szabad vektor akkor egyenlő, ha nagyságuk, irányuk és értelmük megegyezik. Ez azt jelenti, hogy a szabad vektorok önmagukkal párhuzamosan eltolhatók.

A következőkben, többségében szabad vektorokkal fogunk foglalkozni.

2.1.2.) Alapfogalmak

a.) A vektor abszolút értéke:

A vektor abszolút értéke, a vektor hossza, amely egy nem negatív valós szám.

Jele: $|\vec{v}|$

b.) Zérus vektor vagy nullvektor:

A zérus vektor abszolút értéke nulla és iránya tetszőleges.

c.) Egységvektor:

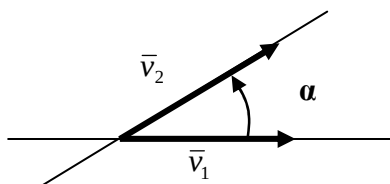
Az egység vektor abszolút értéke 1. Jelölése: $\vec{e}$

Egy $\vec{v}$ vektor abszolút értékét a következőképpen határozzuk meg:

$$e_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Az egységvektor iránya megegyezik az eredeti $\vec{v}$ vektor irányával.

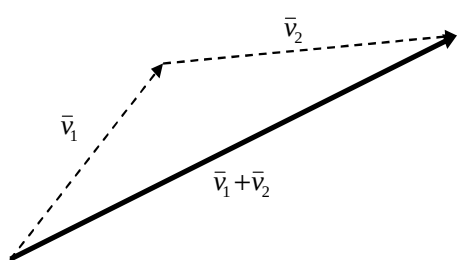
d.) Két vektor hajlásszöge:



A $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorok hajlásszöge – a sorrendet is figyelembe véve – az a szög, amellyel a $\vec{v}_1$ vektor pozitív forgatással a $\vec{v}_2$ vektor irányba forgatható.

2.1.3.) Műveletek vektorokkal

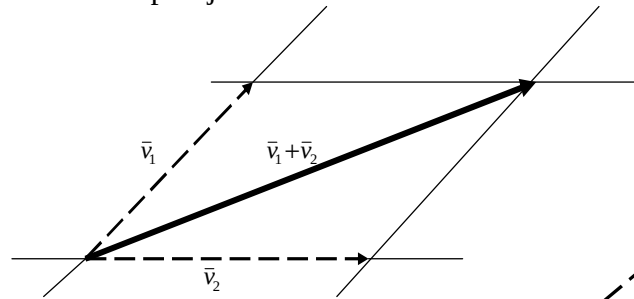
a.) Vektorok összeadása:



A $\vec{v}_1$ és $\vec{v}_2$ vektorok összegét a következőképpen értelmezzük. Az első vektor végpontjához hozzáillesztjük a második vektor kezdőpontját. Az első vektor kezdőpontjából a második vektor végpontjába mutató vektort nevezzük a $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ vektornak. Ez az összegzési módszer tetszőleges számú vektor összeadására is használható.

Két vektor összegét a paralelogramma módszer szerint is meghatározhatjuk: Ennek során a két vektort közös pontból mérjük föl és egy paralelogramma két szomszédos oldalának tekintjük.

A $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ vektor a paralelogramma irányított átlója, melynek kezdőpontja a két vektor közös kezdőpontja.



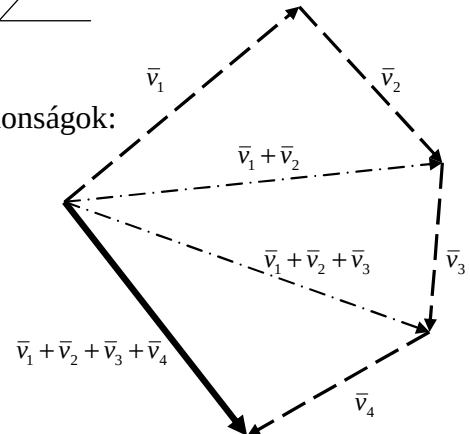
A vektorok összeadására vonatkozó tulajdonságok:

- Kommutatív azaz felcserélhető:

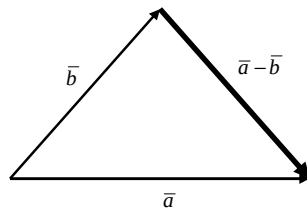
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Asszociatív azaz csoportosítható:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



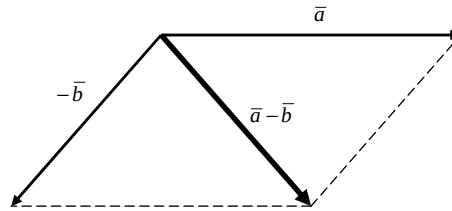
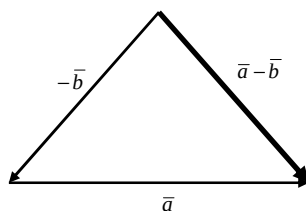
b.) Vektorok kivonása:



Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektort $(\vec{a} - \vec{b})$ különbségén az alábbi vektort értjük.

A két vektor közös kezdőpontból felmérjük, majd képezzük a $\vec{b}$ vektor végpontjából az $\vec{a}$ vektor végpontjába mutató vektort.

Az $\vec{a} - \vec{b}$ vektort képezhetjük az $\vec{a} + (-\vec{b})$ összegeként is.

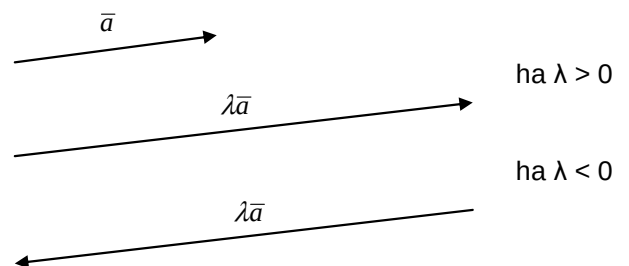


c.) Vektorok szorzása skalárral:

Az $\vec{a}$ vektor és a λ skalár szám szorzata a $\lambda\vec{a}$ vektor, melynek a abszolút értéke az $\vec{a}$ vektor abszolút értékének $|\lambda|$ -szorososa, iránya pe-

dig $\vec{a}$ -val egyező, ha λ pozitív és ellentétes ha λ negatív.

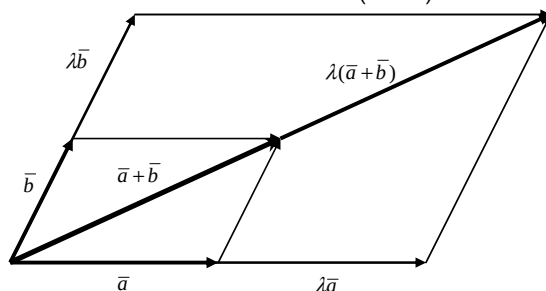
Ha $\lambda = 0$, akkor a szorzás eredménye zérusvektor (nullvektor).



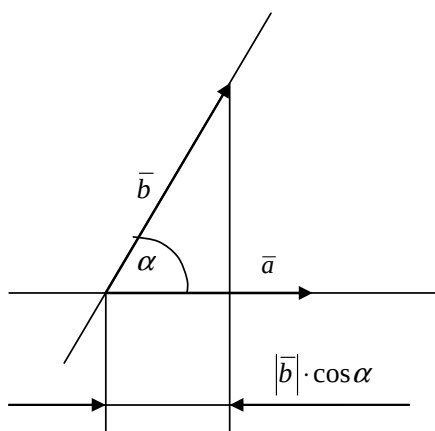
A skalárral való szorzás tulajdonságai:

- Asszociativitás (csoportosíthatóság): $(\lambda_1 \lambda_2) \bar{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{a}) = \lambda_2 (\lambda_1 \bar{a})$
- Disztributivitás (szétválaszthatóság): $(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$ és

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$$



d.) Vektor szorzása vektorral skalárisan (skaláris szorzat)



Két vektor skaláris szorzata a két vektor abszolút értékének és hajlásszögük koszinuszának szorzata. Jele: $\bar{a} \cdot \bar{b}$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \alpha$$

Két vektor skaláris szorzata valós számot, skalárt eredményez. Két vektor skaláris szorzata az alábbi esetekben lehet zérus:

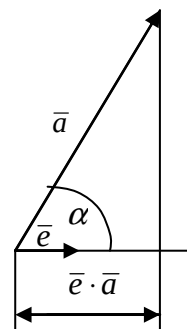
- $|\bar{a}| = 0$
- $|\bar{b}| = 0$
- $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

Vagyis két nem zérus vektor skaláris szorzata zérus, ha a vektorok merőlegesek egymásra. Másképp fogalmazva: két nem nullvektor skaláris szorzata csak akkor nulla, ha a két vektor derékszöget zár be egymással.

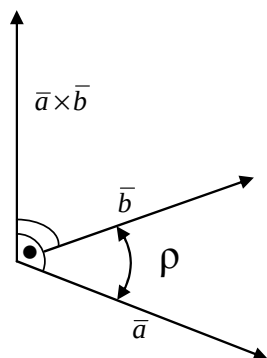
A skaláris szorzás az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.:

- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$
- $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b})$
- $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$

Ha két vektor közül az egyik egységvektor, akkor az $\bar{e} \cdot \bar{a}$ skalár szorzat, az $\bar{a}$ vektor $\bar{e}$ vektorra vett merőleges vetületét adja.



e.) Vektor szorzása vektorral vektoriálisan (vektoriális szorzat)



Két vektor vektoriális szorzata vektor. Jele: $\vec{a} \times \vec{b}$
(A sorrend fontos!)

Ennek abszolút értéke: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \rho$

Az $(\vec{a} \times \vec{b})$ vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokra merőleges úgy, hogy az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorok ebben a sorrendben egy jobb sodrású rendszert alkotnak.

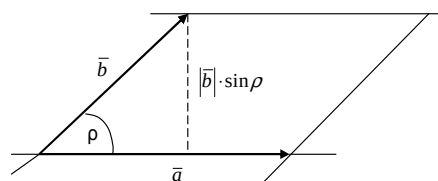
A vektoriális szorzat abszolút értékének geometriai jelentése: a két vektor által kifeszített paralelogramma területe.

Két vektor vektoriális szorzata is lehet zérus, abban az esetben, ha egyik vektor sem nullvektor. Ha két vektor párhuzamos, akkor vektoriális szorzatuk zérus, mert az általuk bezárt szög szinusza zérus.

Ez a megállapítás fordítva is igaz, ha két nem zérus vektor vektoriális szorzata zérus, akkor a vektorok párhuzamosak egymással.

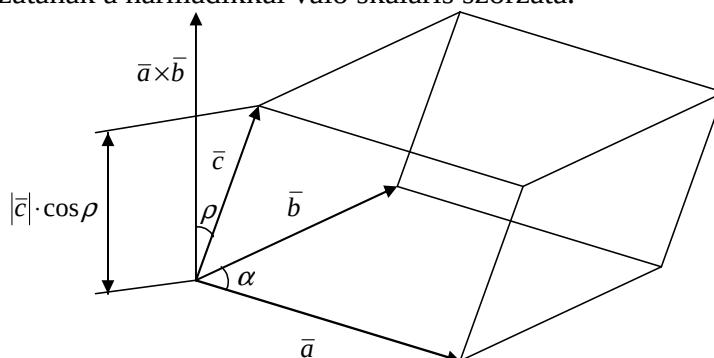
A vektoriális szorzás tulajdonságai:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (A tényezők felcserélése előjelváltással jár!)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda\vec{b}$
- $\left. \begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned} \right\} \text{Kifejtési tétel.}$



f.) Vegyes szorzás

Három vektor vegyes szorzata egy skalár szám, amely két vektor vektoriális szorzatának a harmadikkal való skaláris szorzata.



$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \rho$$

A vegyes szorzat geometriai jelentése az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. Annak ellenére, hogy a térfogat a fizikai értelmezés szerint mindig pozitív értékű, a vegyes szorzat eredménye aszerint pozitív vagy negatív, hogy a három vektor jobb vagy balrendszert alkot-e.

A felcserélési tétel szerint:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$$

A vegyes szorzat zérusértékű lehet akkor is, ha egyik tényezője sem zérus.

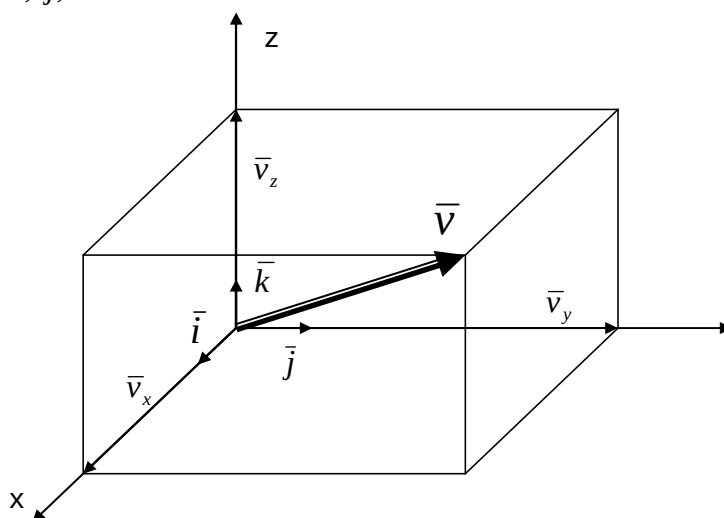
Az $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ egyenlőség áll fenn, ha a három vektor egy síkban van (komplanáris).

2.2.) A vektor algebra koordinátás értelmezése

2.2.1.) A vektor koordinátás értelmezése

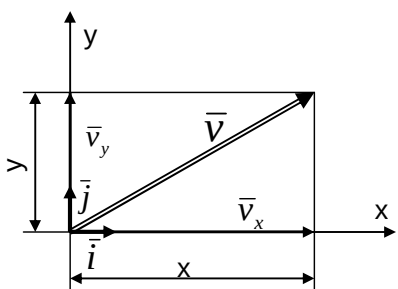
A vektorok koordinátás értelmezése során jobbsodrású koordináta rendszert használunk.

Legyen az x,y,z koordinátarendszer pozitív tengelyeinek irányába mutató egységvektorok: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



A háromdimenziós tér, bármely $\vec{v}$ vektora előállítható

$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ alakban, ahol x,y,z a $\vec{v}$ vektor koordinátái.



Síkbeli feladatok esetén csak kétdimenziós koordinátarendszert használunk. Ekkor a vektoroknak a $\vec{k}$ egységvektor irányába eső komponense (koordinátája) zérus értékű.

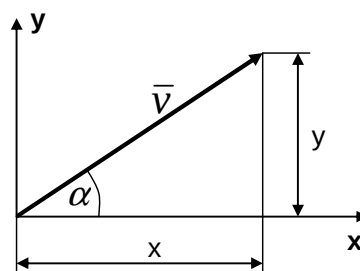
$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Kétdimenziós esetben a trigonometria is könnyebben kezelhető.

$$x = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

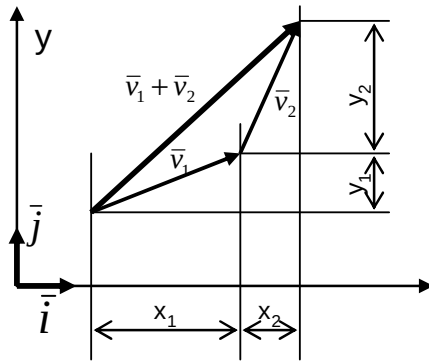
$$y = |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$



2.2.2.) Műveletek vektorokkal

a.) Vektorok összeadása



Legyen $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ és $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, akkor $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$.

Két vektor összegének koordinátái az összeadandó vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlő.

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_i + \dots + \vec{v}_n = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \vec{i} + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \vec{j} + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) \vec{k}$$

Mivel a koordináták előjeles számok, ezért az összegzésnél az előjeleket figyelembe kell venni.

b.) Vektorok különbsége

Két vektor különbségének koordinátái a megfelelő koordináták különbségével egyenlő.

Legyen $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ és $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Ekkor $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$.

Két vektor különbségének ismerete lehetőséget teremt arra, hogy meghatározzuk két pont közötti vektor koordinátáit.

Az ábrára rajzolt vektorokra felírhatjuk az alábbi összefüggést:

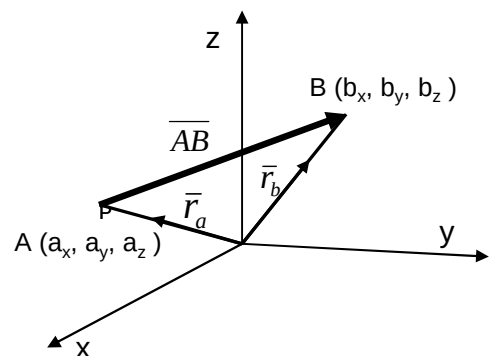
$$\vec{r}_a + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_b.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\text{kapjuk: } \overrightarrow{AB} = \vec{r}_b - \vec{r}_a.$$

Ez azt jelenti, ha ismerjük a két pont koordinátáit, a két pontot összekötő vektort úgy határozhatjuk meg, hogy a végpont koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit.

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$



c.) Vektor szorzása skalárral koordinátás alakban

Egy λ skalár szám és egy vektor szorzatának koordinátái az eredeti vektor koordinátáinak λ - szorosa.

Legyen $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, akkor $\lambda\vec{v} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$.

d.) Skaláris szorzat koordinátás alakja

Két vektor skaláris szorzata egyenlő a két vektor megfelelő koordinátái szorzatának összegével.

Legyen $\bar{v}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, vagy másképp $\bar{v}_1 = [x_1, y_1, z_1]$ és legyen

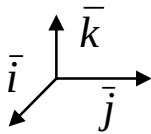
$$\bar{v}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}, \text{ illetve } \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 &= x_1\bar{i} \cdot x_2\bar{i} + y_1\bar{j} \cdot x_2\bar{i} + z_1\bar{k} \cdot x_2\bar{i} \\ &+ x_1\bar{i} \cdot y_2\bar{j} + y_1\bar{j} \cdot y_2\bar{j} + z_1\bar{k} \cdot y_2\bar{j} \\ &+ x_1\bar{i} \cdot z_2\bar{k} + y_1\bar{j} \cdot z_2\bar{j} + z_1\bar{k} \cdot z_2\bar{k} \end{aligned}$$

Mivel $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1$ és $\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$, így

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = [x_1, y_1, z_1] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

e.) Vektoriális szorzat koordinátás alakja



Az $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ jobbrendszert alkotó, egymásra merőleges egységvektorok páronkénti vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} \bar{i} \times \bar{i} &= \bar{0} & \bar{i} \times \bar{j} &= \bar{k} & \bar{i} \times \bar{k} &= -\bar{j} \\ \bar{j} \times \bar{i} &= -\bar{k} & \bar{j} \times \bar{j} &= \bar{0} & \bar{j} \times \bar{k} &= \bar{i} \\ \bar{k} \times \bar{i} &= \bar{j} & \bar{k} \times \bar{j} &= -\bar{i} & \bar{k} \times \bar{k} &= \bar{0} \end{aligned}$$

Legyen $\bar{v}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ és $\bar{v}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$.

Ekkor $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \times (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})$.

Az előzőeket valamint a disztributivitást felhasználva az eredmény számítható.

A vektori szorzat a mátrixszámítást felhasználva az alábbi alakban írható fel.

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \det \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

f.) Vegyes szorzat koordinátás alakja

Legyen

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \\ \bar{v}_2 &= x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}, \\ \bar{v}_3 &= x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k} \end{aligned}$$

Ekkor:

$$\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

g.) A vektor abszolút értékének koordinátás előállítása

Egy vektor abszolút értéke, a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök.

$$\text{Legyen } \bar{v} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}, \text{ akkor } |\bar{v}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

h.) Egységvektor előállítása koordinátás alakban

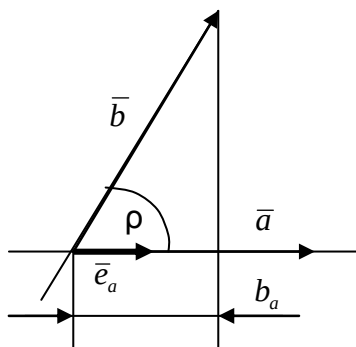
$$\text{Legyen } \bar{v} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}, \text{ ekkor } \bar{e}_a = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

i.) Vetület előállítása koordinátás alakban

A $\bar{b}$ vektornak az $\bar{a}$ vektorra való merőleges vetülete. $b_a = \bar{b} \cdot \bar{e}_a = \bar{b} \cdot \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$

$$\text{Legyen } \bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \text{ és } \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

$$b_a = (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) \cdot \frac{a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$



3.) A tenzor

3.1.) A tenzor fogalma

A fizikai rendszerek változását szimbolikusan operátorokkal fejezzük ki. Ha egy $\bar{v}$ vektort elforgatunk valamely adott szöggel és ezzel a $\bar{v}^*$ vektorhoz jutunk, akkor ezt a változást jellemezhetjük az $\bar{\mathbf{0}}$ operátorral.

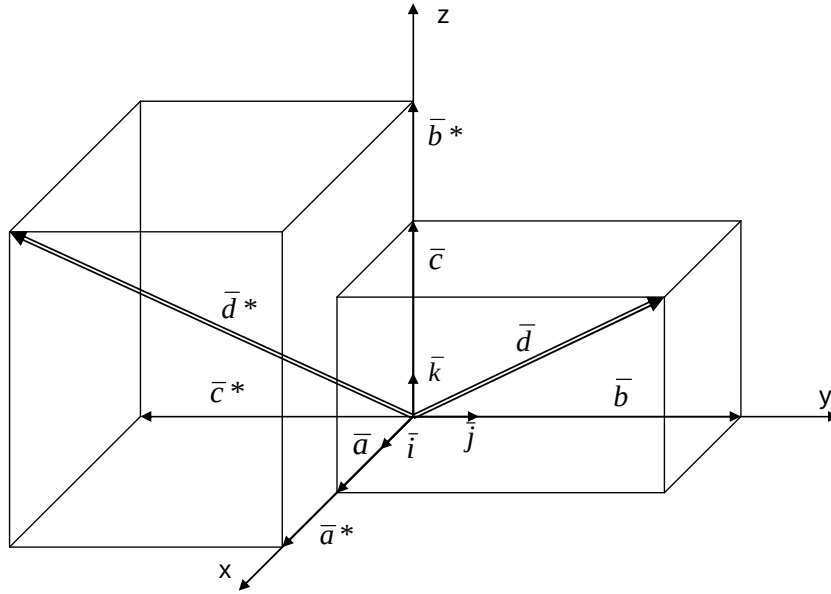
$$\bar{v}^* = \bar{\mathbf{0}} \bar{v}$$

$$\text{Abban az esetben, ha az operátor rendelkezik a } \bar{\mathbf{0}} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i \right] = \sum_{i=1}^n \alpha_i [\bar{\mathbf{0}} \bar{v}_i]$$

tulajdonságokkal – ahol α_i skalár szám – az operátort lineáris, homogén vektoroperátornak vagy más néven tenzornak nevezzük. A tenzort vastag betűvel és két felülvonással jelöljük.

Egy tenzort akkor tekintünk egyértelműen meghatározottnak, ha meg tudjuk adni tetszőleges vektorral képzett szorzatát, vagy ami ugyanezt jelenti, meg tudjuk mondani, hogy egy adott vektort milyen vektorra képez le.

Ehhez elegendő megadni, hogy a tenzor a tér három nem komplanáris (nem egy síkban fekvő) vektorát mely vektorokra transzformálja. Legyen a tér három nem komplanáris vektora $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ és a transzformáció a következő:



$$\bar{a}^* = \bar{\bar{T}} \bar{a}$$

$$\bar{b}^* = \bar{\bar{T}} \bar{b}$$

$$\bar{c}^* = \bar{\bar{T}} \bar{c}$$

Mivel $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$, a tér bármely $\bar{d}$ vektora felírható. $\bar{d} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c}$ alakban.

Alkalmazva a $\bar{d}$ vektorra, a transzformációt, kapjuk:

$$\bar{d}^* = \bar{\bar{T}} \bar{d} = \bar{\bar{T}} (\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c}) = \lambda_1 \bar{\bar{T}} \bar{a} + \lambda_2 \bar{\bar{T}} \bar{b} + \lambda_3 \bar{\bar{T}} \bar{c} = \lambda_1 \bar{a}^* + \lambda_2 \bar{b}^* + \lambda_3 \bar{c}^*$$

Vagyis, a $\bar{d}^*$ (transzformált vektor) előállítható az alapvektorok transzformáltjainak lineáris kombinációjaként.

Az előzőekből következik, hogy ha a vektorhármast $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ rögzítjük, akkor a tenzor egyértelműen jellemezhető. Legcélszerűbb, ha e vektorhármast a koordinátengelyeket kijelölő egységvektorokat $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ választjuk.

$$\begin{aligned} \bar{e}_1^* &= \bar{\bar{T}} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2^* &= \bar{\bar{T}} \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3^* &= \bar{\bar{T}} \bar{e}_3 \end{aligned} \quad \bar{e}_1^* = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad \bar{e}_2^* = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad \bar{e}_3^* = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

vektorokat, a $\bar{\bar{T}}$ tenzort ezekkel, mint vektorrendezőkkel jellemezhetjük.

$$\bar{\bar{T}} = [\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*]$$

Tetszőleges $\bar{v} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3$ vektor esetén a leképezés

$$\bar{\bar{T}} \bar{v} = \lambda_1 \bar{e}_1^* + \lambda_2 \bar{e}_2^* + \lambda_3 \bar{e}_3^*, \text{ illetve}$$

$$\bar{v}^* = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

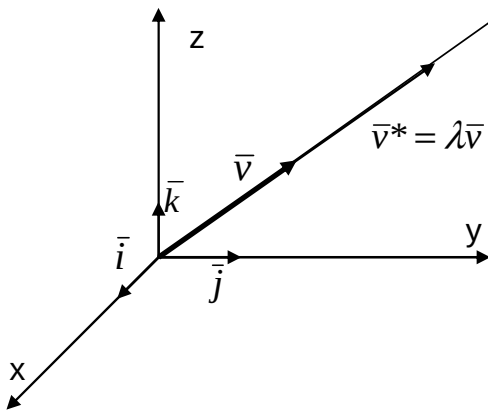
alakban lehetséges.

A tenzort tehát három vektor vagy kilenc skalár adat jellemezheti. Ezeket a skalár adatokat mátrixba foglalva kapjuk a tenzor mátrixát. Például:

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3.2.) Sajátérték, sajátvektor

A vektorok leképezésénél léteznek olyan egységvektorok, amelyekhez az adott tenzor az eredeti vektorral egyező állású vektort rendel.



Ezeket az vektorokat a $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ tenzor sajátvektorainak, a hozzájuk tartozó λ számokat pedig a tenzor sajátértékeinek nevezzük. A mechanika oktatás gyakorlatában szimmetrikus tenzorok fordulnak elő.

A szimmetrikus tenzornak legalább – a dimenziószámmal megegyező számú – egymásra páronként merőleges $\bar{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) sajátvektor-rendszere és ennek megfelelően $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ valós sajátértéke van. Ezek a sajátértékek illetve sajátvektorok a mechanika különböző ágai-ban más és más fizikai tartalommal bírnak.

Rendezzük át a $\bar{\bar{\mathbf{T}}}\bar{v} = \lambda\bar{v}$ egyenletet.

$\bar{\bar{\mathbf{T}}}\bar{v} - \lambda\bar{\bar{\mathbf{E}}}\bar{v} = (\bar{\bar{\mathbf{T}}} - \lambda\bar{\bar{\mathbf{E}}})\bar{v} = \bar{0}$, ahol $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ az úgynevezett egységtenzor.

A vektoregyenlet mátrixos írásmóddal az alábbi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ahol v_x, v_y, v_z a $\bar{v}$ vektor koordinátái és $\bar{\bar{\mathbf{E}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A homogén lineáris egyenletrendszernek triviálistól különböző megoldása csak akkor van, ha

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

A tenzor első skalár invariánsa: $s_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

A tenzor második skalár invariánsa:

$$s_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a második skalár invariáns a tenzor főátlójában található elemekhez tartozó aldeterminánsok összege.

A tenzor harmadik skalár invariánsa: $s_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Az egyenlet így $\lambda^3 - s_1\lambda^2 + s_2\lambda - s_3 = 0$ alakú harmadfokú polinom. Ennek megoldásai adják a $\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ sajátértékeket.

A λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektort $\bar{v}_i$ az alábbi egyenletek felhasználásával tudjuk meghatározni:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

illetve,

$$v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 = 1$$

Az előző négy egyenlet közül csak három lineárisan független. Ezek segítségével a keresett vektorrendezők meghatározhatók.

Síkbeli transzformáció esetén a transzformációt leíró tenzor csak négy elemet tartalmaz.

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

A karakterisztikus egyenlet ennek megfelelően csak másodfokú.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Vagyis a tenzornak két sajátértéke és két sajátvektora van. Ezek a vektorok – szimmetrikus tenzorokról lévén szó – merőlegesek egymásra.

4.) Példák a matematikai összefoglaló témakörből

1. példa

Legyen adott az alábbi két mátrix:

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ és } \overline{\overline{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a két mátrix összegének, különbségének és szorzatának determinánsát!

a.) Összeg

$$\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}, \text{ tehát } \overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

A determináns meghatározását végezzük el az első sor szerinti kifejtéssel.

$$\begin{aligned} \det \overline{\overline{C}} &= +7 \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 7 \cdot [8 \cdot 7 - 2 \cdot 0] - 8 \cdot [6 \cdot 7 - 5 \cdot 0] + 5 [6 \cdot 2 - 5 \cdot 8] = \\ &= 7 \cdot [56] - 8 \cdot [42] + 5 \cdot [-28] = 392 - 336 - 140 = \underline{\underline{-84}} \end{aligned}$$

b.) Különbség

$$\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{D}}, \text{ tehát } \overline{\overline{D}} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

A determinánst fejtsük ki a középső sor szerint.

$$\begin{aligned} \det \overline{\overline{D}} &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (14 + 10) + 0 \cdot (...) - 0 \cdot (...) = \underline{\underline{48}} \end{aligned}$$

c.) Szorzat

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{H}}$$

$$\overline{\overline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 6 + 12 + 5 = 23$$

$$h_{12} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 5 + 12 + 10 = 27$$

$$h_{13} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 7 = 0 + 0 + 35 = 35$$

$$h_{21} = 2 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 12 + 16 + 0 = 28$$

$$h_{22} = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 10 + 16 + 0 = 26$$

$$h_{23} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$h_{31} = 4 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 24 + 0 + 0 = 24$$

$$h_{32} = 4 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 20 + 0 + 0 = 20$$

$$h_{33} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 7 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{Tehát } \overline{\overline{H}} = \begin{bmatrix} 23 & 27 & 35 \\ 28 & 26 & 0 \\ 24 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

A determináns értékének meghatározását végezzük el az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel.

$$\det \overline{\overline{H}} = 35 \cdot \begin{vmatrix} 28 & 26 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 27 \\ 24 & 20 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 23 & 27 \\ 28 & 26 \end{vmatrix} =$$

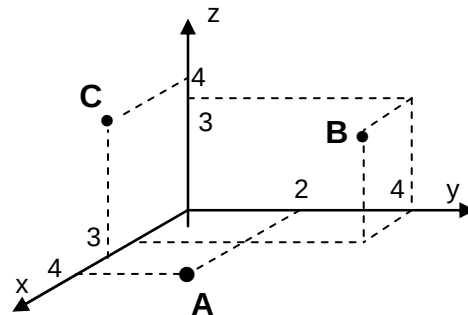
$$= 35 \cdot (28 \cdot 20 - 24 \cdot 26) = \underline{\underline{-2240}}$$

2. példa

Határozzuk meg a $\overline{CA}$ és $\overline{CB}$ vektorra merőleges $\overline{a}$ vektort!

$$A(4, 2, 0); B(2, 4, 3); C(3, 0, 4)$$

$$\overline{CA} = 1\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k} \quad \overline{CB} = -1\bar{i} + 4\bar{j} - 1\bar{k}$$



$$\overline{a} = \overline{CA} \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}(-2 + 16) - \bar{j}(-1 - 4) + \bar{k}(4 + 2) = 14\bar{i} + 5\bar{j} + 6\bar{k}$$

Természetesen a $\overline{CB} \times \overline{CA}$ vektor is merőleges a két vektorra.

$$\overline{CB} \times \overline{CA} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \bar{i}(-16 + 2) - \bar{j}(4 + 1) + \bar{k}(-2 - 4) = -14\bar{i} - 5\bar{j} - 6\bar{k}$$

Amint várható volt, az egyik vektor a másik (-1) - szerese.

3. példa

Határozzuk meg a $\overline{CB} = \vec{b}$ vektor vetületét a $\overline{CA} = \vec{a}$ vektorra.

$$A(4, 4, 2); B(2, 6, 5); C(1, 1, 3)$$

$$\overline{CB} = \vec{b} = 1\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

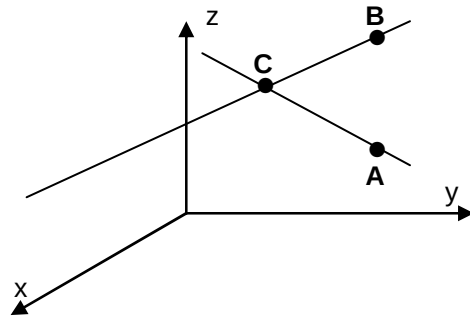
$$\overline{CA} = \vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$

$$\vec{e}_a = +\frac{3}{\sqrt{19}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{19}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{19}}\vec{k}$$

$$S = \vec{b} \cdot \vec{e}_a = [1, 5, 2] \cdot \begin{bmatrix} +\frac{3}{\sqrt{19}} \\ +\frac{3}{\sqrt{19}} \\ -\frac{1}{\sqrt{19}} \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{19}} + \frac{15}{\sqrt{19}} - \frac{2}{\sqrt{19}} = \frac{16}{\sqrt{19}} = 2,065$$



4. példa

Határozza meg az A, B, C, D pontokkal megadott paralelepipedon térfogatát!

$$A(4, -2, 3); B(8, 6, -1); C(6, 10, 0); D(9, 7, 5)$$

A keresett térfogatot, a

$\overline{BA} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{c}$, $\overline{BD} = \vec{d}$ vektorok vegyes szorzata adja.

$$\overline{BA} = \vec{a} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

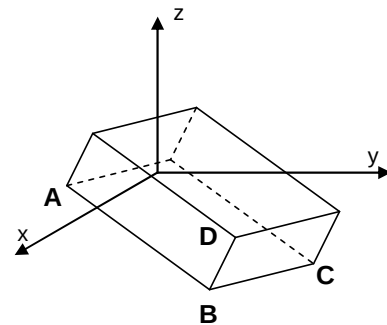
$$\overline{BC} = \vec{c} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$\overline{BD} = \vec{d} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$V = |\vec{a}\vec{c}\vec{d}|$$

$$\vec{a}\vec{c}\vec{d} = \begin{vmatrix} -4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -4 \cdot (24 - 2) + 8 \cdot (-12 - 1) + 4 \cdot (-2 - 4) = -88 - 104 - 24 = -216$$

$$V = \underline{\underline{216}}$$

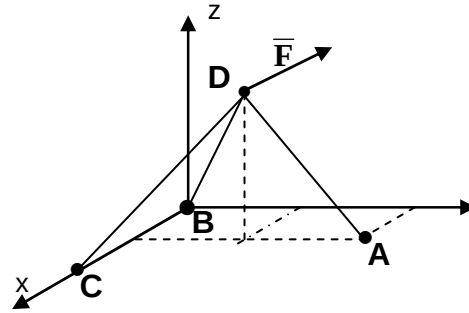


5. példa

Bontsuk fel az $\vec{F}$ vektort $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{BD} = \vec{b}$ és $\vec{CD} = \vec{c}$ vektorok irányába mutató komponensekre!

A (2, 6 0); B (0, 0, 0); C (4, 0, 0); D (2, 3, 6)

$$\vec{F} = -200\vec{i} + 300\vec{j} + 400\vec{k}$$



A felbontás során kapott komponensvektorok összege a felbontandó vektorral egyenlő

$$\vec{F} = \vec{a}^* + \vec{b}^* + \vec{c}^*.$$

A komponensvektorok mindegyike valamely előre megadott vektor irányába néz, tehát írható, hogy:

$$\vec{a}^* = \lambda_1 \vec{a}$$

$$\vec{b}^* = \lambda_2 \vec{b}$$

$$\vec{c}^* = \lambda_3 \vec{c}$$

Ezekkel a vektoregyenlet az alábbi alakot ölti: $\vec{F} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$

A megadott pontok alapján a vektorok számíthatók, vagyis

$$\vec{AD} = \vec{a} = 0\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{BD} = \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{CD} = \vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

A vektoregyenlet megoldására többféle módszer is létezik:

A.) Megoldás:

Helyettesítsük be a vektoregyenletbe a megadott $\vec{F}$ illetve a kiszámított $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok vektorrendezőit.

$$-200\vec{i} + 300\vec{j} + 400\vec{k} = \lambda_1(0\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}) + \lambda_2(2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}) + \lambda_3(-2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k})$$

Az egyenlet jobboldalán végezzük el a skalárral való szorzást, valamint csoportosítsuk azokat az $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ egységvektorok szerint.

$$-200\vec{i} + 300\vec{j} + 400\vec{k} =$$

$$= (0\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3) \cdot \vec{i} + (-3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) \cdot \vec{j} + (6\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3) \cdot \vec{k}$$

Két vektor akkor egyenlő, ha a megfelelő vektorrendezők értéke azonos. Ezt figyelembe véve, az alábbi egyenletrendszert kapjuk.

$$-200 = 0\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3$$

$$300 = -3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3$$

$$400 = 6\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3$$

A három ismeretlenes egyenletrendszer megoldása során az alábbi értékeket kapjuk:

$$\lambda_1 = -\frac{2400}{144} \qquad \lambda_2 = -\frac{1200}{144} \qquad \lambda_3 = \frac{13200}{144}$$

B.) Megoldás:

Szorozzuk meg a vektoregyenletet jobbról skalárisan a $(\bar{b} \times \bar{c})$ vektorral.

$$\begin{aligned} \bar{F} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) &= \\ &= \lambda_1 \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) + \lambda_2 \bar{b}(\bar{b} \times \bar{c}) + \lambda_3 \bar{c}(\bar{b} \times \bar{c}) \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy a $(\bar{b} \times \bar{c})$ olyan vektor, amely merőleges mind a $\bar{b}$, mind a $\bar{c}$ vektorra, továbbá azt, hogy két egymásra merőleges vektor skaláris szorzata zérus, a jobb oldalon a második és harmadik tag zérus értékű.

$$\bar{b} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$$

$$\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = 0$$

Ezzel az egyenlet az alábbi alakot veszi fel.

$$\bar{F} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \lambda_1 \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$$

Az egyenletben található vektor műveletek összevontan felírhatók úgynevezett vegyes szorzatokként.

$$\bar{F} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{F} \bar{b} \bar{c}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c}$$

Mivel a vegyes szorzatok eredménye skalár szám, írható

$$\lambda_1 = \frac{\bar{F} \bar{b} \bar{c}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}}$$

A λ_1 értéke, tehát kiszámítható két determináns hányadosaként. A λ_2 kiszámításakor hasonlóan járunk el, azzal a különbséggel, hogy a vektor egyenletet $(\bar{c} \times \bar{a})$ -val szorozzuk meg.

A λ_2 értéke

$$\lambda_2 = \frac{\bar{F} \bar{c} \bar{a}}{\bar{b} \bar{c} \bar{a}} = \frac{-\bar{F} \bar{a} \bar{c}}{-\bar{b} \bar{a} \bar{c}} = \frac{\bar{a} \bar{F} \bar{c}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}}$$

Itt figyelemmel voltunk arra, hogy a determináns értéke előjelet vált, ha két sorát felcseréljük. Hasonlóan adódik a

$$\lambda_3 = \frac{\bar{a} \bar{b} \bar{F}}{\bar{a} \bar{b} \bar{c}}$$

A négy determináns kiszámítása az alábbiak szerint történik.

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (12 + 12) + 6 \cdot (6 + 6) = 144$$

$$\bar{F} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} -200 & 300 & 400 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -200 \cdot (18 - 18) - 300 \cdot (12 + 12) + 400 \cdot (6 + 6) = -2400$$

$$\bar{a}\bar{F}\bar{c} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ -200 & 300 & 400 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1200 + 800) + 6 \cdot (-600 + 600) = -1200$$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{F} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ -200 & 300 & 400 \end{vmatrix} = 3 \cdot (800 + 1200) + 6 \cdot (600 + 600) = 13200$$

Ezekkel

$$\lambda_1 = \frac{-2400}{144} \quad \lambda_2 = \frac{-1200}{144} \quad \lambda_3 = \frac{13200}{144}$$

A kiszámított λ értékekkel a komponensvektorok:

$$\bar{a}^* = \lambda_1 \bar{a} = 0\bar{i} + \frac{7200}{144} \bar{j} + \frac{-14400}{144} \bar{k}$$

$$\bar{b}^* = \lambda_2 \bar{b} = -\frac{2400}{144} \bar{i} - \frac{3600}{144} \bar{j} - \frac{7200}{144} \bar{k}$$

$$\bar{c}^* = \lambda_3 \bar{c} = -\frac{26400}{144} \bar{i} + \frac{39600}{144} \bar{j} + \frac{79200}{144} \bar{k}$$

Ellenőrzésképpen adjuk össze a komponensvektorokat.

$$\bar{a}^* + \bar{b}^* + \bar{c}^* = -200\bar{i} + 300\bar{j} + 400\bar{k}$$

Ezzel megkaptuk az $\bar{F}$ vektort.

6. példa

Határozzuk meg az $\bar{\mathbf{I}}$ tenzor sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 80 & -50 \\ -50 & 20 \end{bmatrix}$$

Sajátérték meghatározása:

$$\det \begin{bmatrix} 80 - \lambda & -50 \\ -50 & 20 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(80 - \lambda) \cdot (20 - \lambda) - (-50)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 100\lambda + 1600 - 2500 = 0$$

$$\lambda^2 - 100\lambda - 900 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 + 4 \cdot 900}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{13600}}{2} = \frac{100 \pm 116,62}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 108,31 \quad \lambda_2 = -8,31$$

$\lambda_1 = 108,31$ sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 80-108,31 & -50 \\ -50 & 20-108,31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } e_{1x}^2 + e_{1y}^2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} -28,31 & -50 \\ -50 & -88,31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x}^2 \\ e_{1y}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } e_{1x}^2 + e_{1y}^2 = 1$$

$$\begin{aligned} -28,31 \cdot e_{1x} - 50 \cdot e_{1y} &= 0 \\ -50 \cdot e_{1x} - 88,31 \cdot e_{1y} &= 0 \end{aligned} \text{ és } e_{1x}^2 + e_{1y}^2 = 1$$

$$e_{1x} = -\frac{50}{28,31} e_{1y} = -1,7662 \cdot e_{1y}$$

$$(-1,7662 \cdot e_{1y})^2 + e_{1y}^2 = 1 \quad e_{1y} = \pm 0,49271 \quad e_{1x} = \mp 0,87022 \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{e_{1y}}{e_{1x}} = \frac{0,49271}{-0,87022} \Rightarrow \alpha = -29,52^\circ$$

Ha az egység vektort $\bar{e}_n = \cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{j}$ alakban használjuk. Akkor az alábbi megoldást kapjuk.

$$-28,31 \cos \alpha - 50 \sin \alpha = 0$$

$$-50 \cos \alpha - 88,31 \sin \alpha = 0$$

Ebben az esetben a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ azonosság alapján az $\bar{e}_1$ vektor biztosan egységvektor.

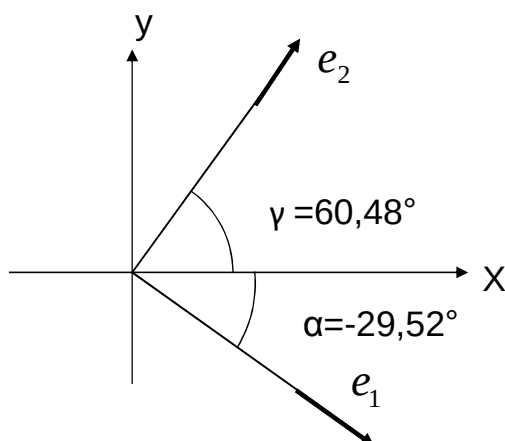
$$-28,31 \cos \alpha = 50 \sin \alpha$$

$$-\frac{28,31}{50} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$$\alpha = -29,52^\circ$$

$\lambda_2 = -8,31$ sajátértékhez tartozó sajátvektor

$$\begin{bmatrix} 80 - (-8,31) & -50 \\ -50 & 20 - (-8,31) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$88,31 \cdot \cos \gamma - 50 \sin \gamma = 0$$

$$\frac{88,31}{50} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \tan \gamma$$

$$\gamma = 60,48^\circ$$

A két tengely merőleges egymásra.

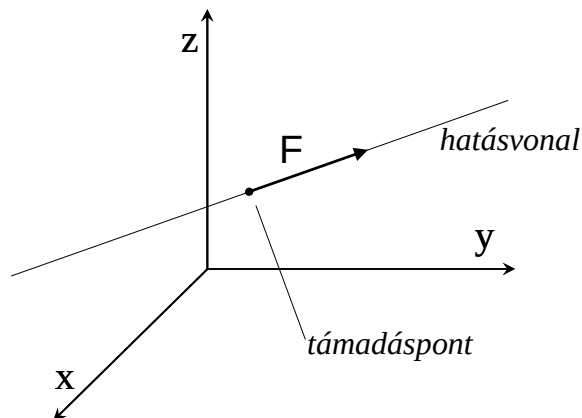
II.) Erőrendszerek

1.) Alapfogalmak

1.1.) Erő

Az erő mindig két test egymásra kifejtett kölcsönhatása. Ez a kölcsönhatás - kevés kivételtől eltekintve - a két test közvetlen érintkezése nyomán keletkezik.

Az erőt vektorjellegű mennyiségnek tekintjük - $\vec{F}$ -, vagyis jellemzője a nagysága, iránya, valamint támadáspontja. Az erő kötött vektor.



A támadásponton keresztülfektetett és az erő irányával párhuzamos egyenes az erő hatásvonala.

Az erő mértékegysége - Newton $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ törvényét figyelembe véve - (1 kg tömegű test $1 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással való gyorsítása): $1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{m}{s^2} = 1 \text{ N}$.

A két test kölcsönhatásában keletkező erőt az érintkező felületek nagysága alapján az alábbi módon osztályozzuk:

Koncentrált erő: az érintkező felületek olyan kicsinyek a kölcsönhatásban résztvevő testekhez képest, hogy pontszerűnek tekinthetők. A koncentrált erő tehát relatív fogalom.

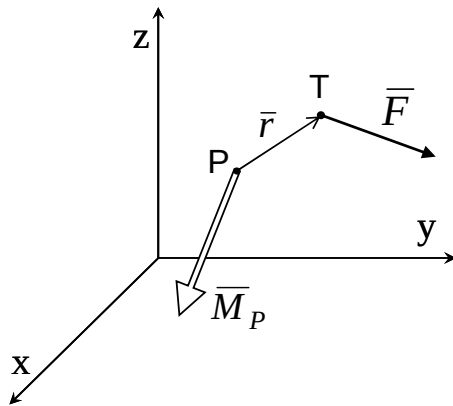
Megoszló terhelés: ha az érintkező felületek kiterjedése egyik irányban nagy, a másik irányban pedig elenyésző, akkor vonal mentén megoszló erőről beszélünk. Mértékegysége $\frac{N}{m}$.

Ha az érintkező felületek méretei mindkét irányban jelentősek, akkor felület mentén megoszló erőről van szó. Mértékegysége $\frac{N}{m^2}$.

Tömegvonzásnál a keletkező erő a test minden egyes térfogatelemére hat. Ekkor térfogaton megoszló erőről beszélünk. Mértékegysége $\frac{N}{m^3}$.

1.2.) Pontra számított nyomaték

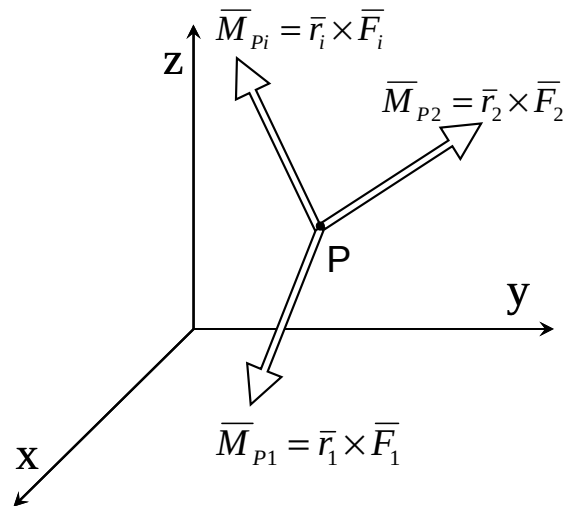
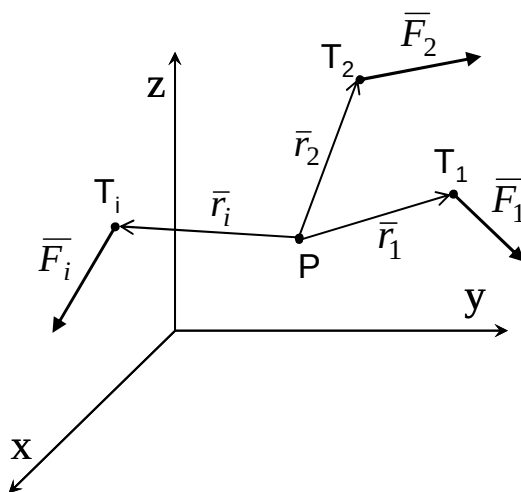
Az erőnek forgató hatása van. Ezt a forgató hatást a forgásponthoz kötött nyomatékvektor jellemzi.



A nyomatékvektort a pontból (P) az erő támadáspontjához (T) irányított vektor ($\vec{r}$) és az erővektor ($\vec{F}$) vektori szorzata adja: $\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F}$.

Jobbos rendszert használva a nyomatékvektort úgy ábrázoljuk, hogy a nyíllal szembenézve a forgató hatás az óramutató járásával ellentétes legyen.

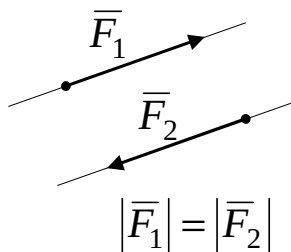
Több erő (erőrendszer) esetén a pontra számított nyomaték a résznyomatékok összegével egyenlő.



$$\vec{M}_P = \sum \vec{M}_{Pi} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

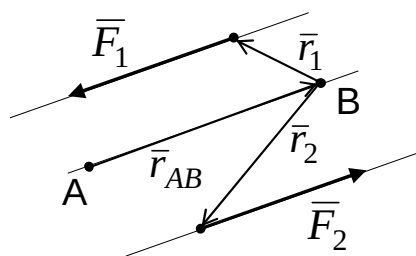
1.3.) Erőpár, koncentrált nyomaték

Az olyan erőrendszert, amely két azonos nagyságú, párhuzamos hatásvonalú, de ellentétes értelmű erőből tevődik össze, erőpárnak nevezzük.



Az erőpár esetében az erők összege zérus.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

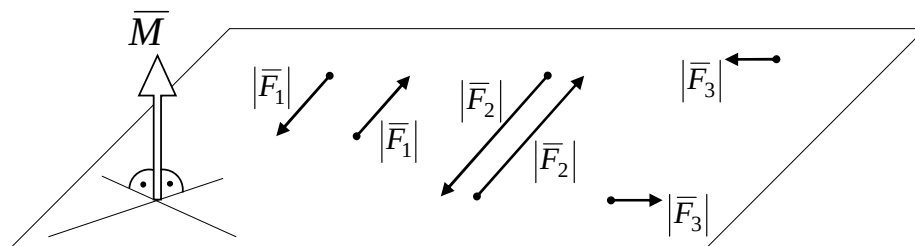


Számítsuk ki az erőpár nyomatékát a tér két különböző pontjára.

$$\vec{M}_A = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \sum \vec{F} = \vec{M}_A, \text{ mivel } \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Az erőpár nyomatéki vektortere tehát homogén és a nyomatékvektor merőleges az erőpár síkjára. Az erőkomponenseivel megadott erőpárhoz mindig egyértelműen hozzárendelhető a nyomatékvektor, azonban ismert nyomatékvektorhoz végtelen sok erőpár tartozhat.

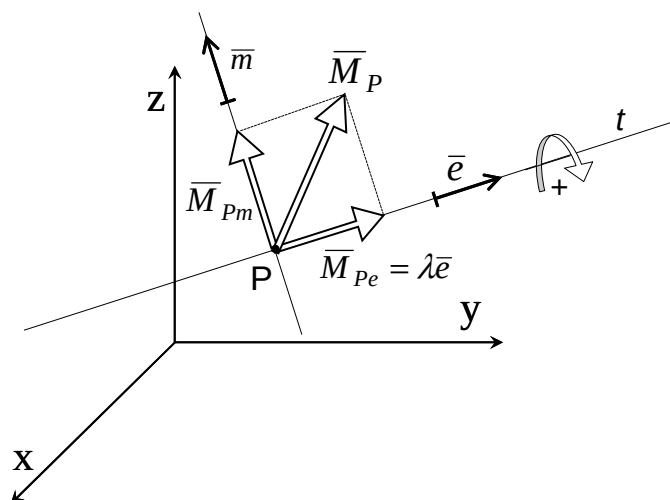


Az erőpár karjának (a két erő hatásvonalának távolsága) változtatásával - a nyomaték értékének állandósága mellett - eljuthatunk ahhoz az esethez, amikor az erőpár karja zérus és az erők végtelen nagyok. Ezzel az absztrakcióval létrehozott erőpárt nevezzük koncentrált nyomatéknak.

Jele: $\curvearrowright$, mely mutatja a forgatás irányát, vagy $\uparrow$, mely nyomaték vektorral szembenézve a forgató hatás az óramutató járásával ellentétes. A nyomatékvektort szabad vektorként kezeljük.

1.4.) Tengelyre számított nyomaték

A fizikai jelenségek tárgyalásánál sok esetben szükség van egy adott tengely körüli forgatóhatás ismeretére.



Tételezzük fel, hogy ismerjük a tengely (t) egy pontjához (P) tartozó nyomatékvektort ($\vec{M}_P$).

Bontsuk fel az $\vec{M}_P$ nyomatékvektort egy tengelyirányú ($\vec{M}_{Pe}$) és egy tengelyre merőleges ($\vec{M}_{Pm}$) komponensre.

A tengely körüli forgatóhatás jellemzésére az $\vec{M}_{Pe}$ komponenszt használjuk.

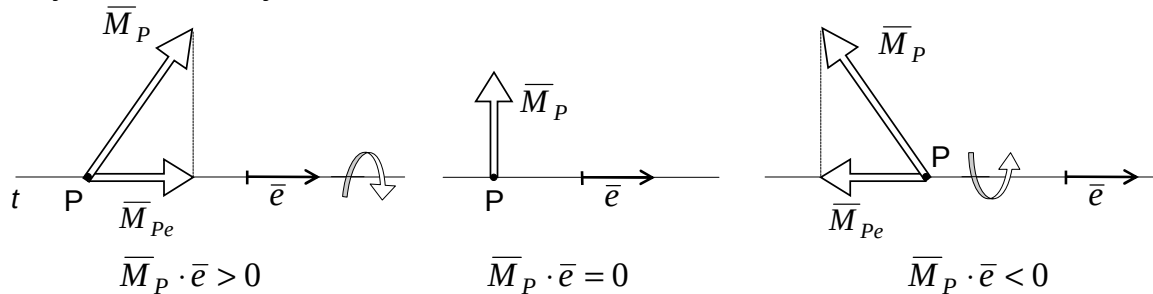
Legyen $\vec{e}$ a tengely egységvektora, $\vec{m}$ az $\vec{e}$ vektorra merőleges egységvektor.

$$\text{Ekkor } \vec{M}_{Pe} = (\vec{M}_P \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e} = M_t \cdot \vec{e}$$

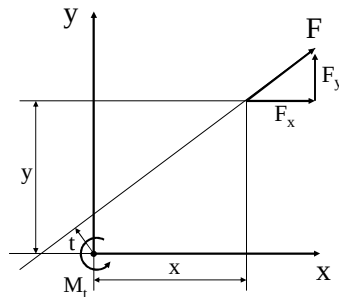
$$\vec{M}_{Pm} = (\vec{M}_P \cdot \vec{m}) \cdot \vec{m} = \vec{e} \times (\vec{M}_P \times \vec{e}).$$

Mivel az $\vec{M}_{Pe}$ nyomatékvektor az $\vec{e}$ egységvektortól csak skalár számban különbözik - melynek értékét az $M_t = \vec{M}_{Pe} \cdot \vec{e}$ skaláris szorzat adja -, elegendő a tengely körüli forgatóhatás jellemzésére az M_t skalár szám.

A tengelyre számított nyomatékot előjeles skalár számként definiáljuk, ahol a skalár abszolútértéke megadja a forgatóhatás nagyságát, az előjele pedig a forgatóhatás irányát. Amennyiben az előjel pozitív, a tengely egységvektorával szembe nézve a forgatás iránya az óramutató járásával ellentétes.



Bizonyítható, hogy a tengely bármely pontjára számított nyomatékvektorból számítjuk a tengelyre számított nyomatékot, az változatlan marad.



Síkbeli erőrendszer esetén, a síkra merőleges (z) tengelyre számított a nyomatékot az alábbi módon is meghatározhatjuk.

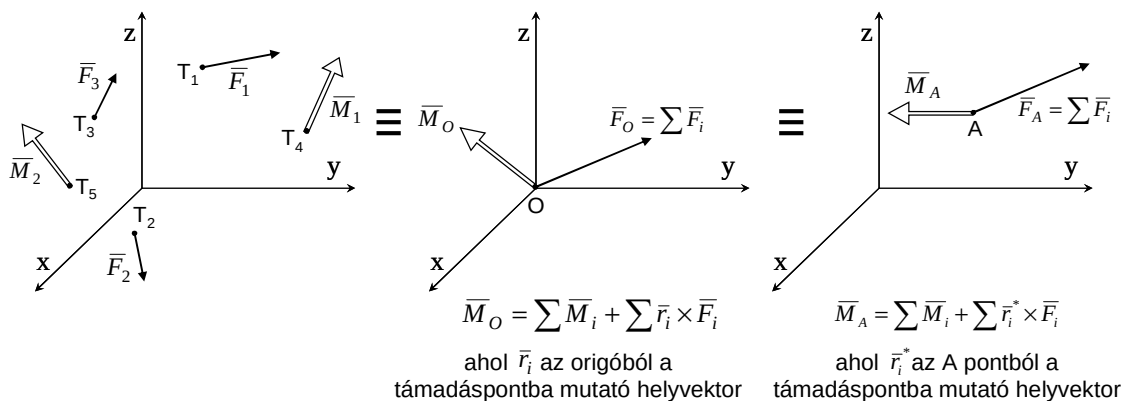
$$M_t = F \cdot t = F_x \cdot y - F_y \cdot x$$

ahol t az F erő hatásvonala és a síkra merőleges tengely (z) normál transzverzálisa.

1.5.) Erőrendszer redukálása

Minden erőrendszer a tér bármely pontjában helyettesíthető egy erőből és egy nyomatékból álló, vele egyenértékű erőrendszerrel. Ez az egyenértékűség azt jelenti, hogy a merev testre gyakorolt hatása mindkét erőrendszernek ugyanaz.

Ez az új erőrendszer (vektorkettős) az eredő vektorkettős. Az eredő vektorkettős mindig egy kijelölt ponthoz tartozik.



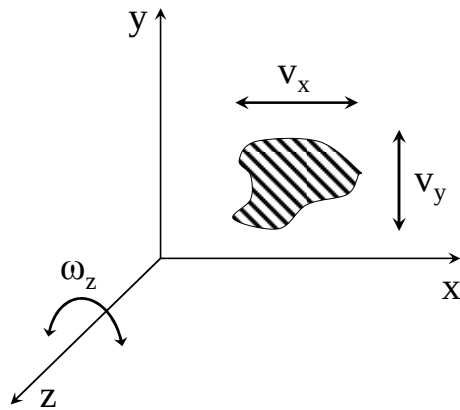
Az erőrendszer redukálásán mindig az eredő vektorkettős meghatározását értjük.

1.6.) Kényszerek

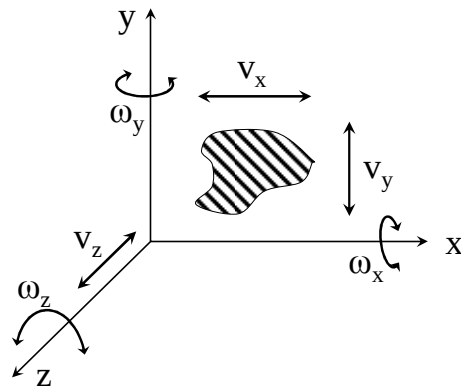
Ha egy merev testre nem egyensúlyban lévő erőket (terheléseket) helyezünk el, a test a mechanika törvényeit követve elmozdul.

Ahhoz, hogy bizonyos szerkezetek vagy szerkezeti elemek betöltsék szerepüket (hordozzák a terhelést) ezeket a szabad mozgásokat meg kell akadályozni.

A síkban három, a térben hat mozgási szabadságfoka van a merev testnek.



- mozgás a x tengely irányában
- mozgás az y tengely irányában
- forgómozgás a z tengely körül



- mozgás az x tengely irányában
- mozgás az y tengely irányában
- mozgás a z tengely irányában
- forgómozgás az x tengely körül
- forgómozgás az y tengely körül
- forgómozgás az z tengely körül

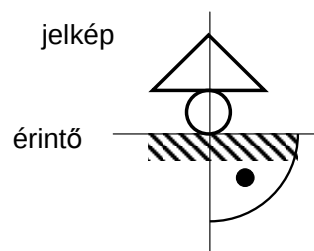
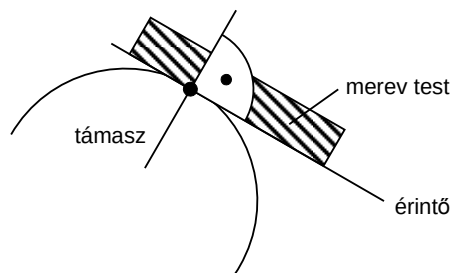
Egy merev test akkor tudja hordozni a rá ható terheléseket, ha a környezetéhez képest nyugalomban van. Ez azt jelenti, hogy az előbb említett mozgási lehetőségeket meg kell akadályozni. Az akadályozást más merev testek segítségével érhetjük el.

Attól függően, hogy a vizsgált és az akadályozó testek milyen kapcsolatban vannak egymással más és más mozgási szabadságfokok szűnnek meg.

Azokat a kapcsolatokat, melyek az általunk vizsgált merev testet kényszerítik a nyugalmi állapotra, kényszereknek nevezzük.

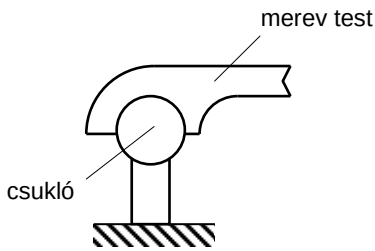
A valóságos kényszerek nagyon sokfélék lehetnek. A következőkben a statikai tanulmányainknál használatos néhány ideális kényszert mutatunk be. Az ideális kényszerek-nél a súrlódást és a gördülési ellenállást elhanyagoljuk. Ezekkel a kényszerekkel számításaink során sokszor valósághűen tudjuk modellezni a valós megoldásokat.

megtámasztás (görgős megtámasztás)



Síkban és térben a megtámasztó felületre merőleges irányban képes megakadályozni a mozgást.

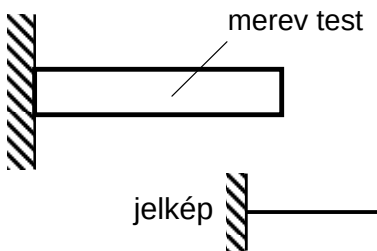
csukló (síkcsukló, gömbcsukló)



Síkban kettő, térben három irányú elmozdulást akadályoz meg. A kényszer az elfordulást nem akadályozza meg.



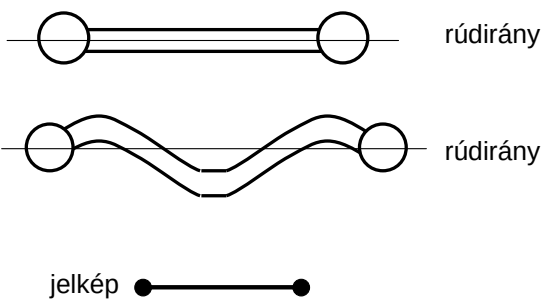
befogás



A síkban és a térben minden mozgást megakadályoz. Ennek megfelelően:

- síkban bármilyen irányú erő és a síkra merőleges tengely körüli nyomaték átadására képes
- térben bármilyen irányú erő és bármilyen irányú nyomaték átadására képes.

rúd

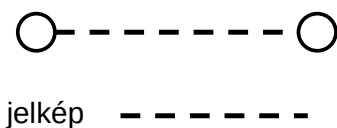


A rúd végtelen merev test, mindkét végén súrlódásmentes csuklókkal.

A rúd az egyensúly feltételeinek megfelelően csak rúdirányú illetve a rúdvégeken található csuklók középpontjait összekötő egyenes mentén ható erők hatására lehet egyensúlyban.

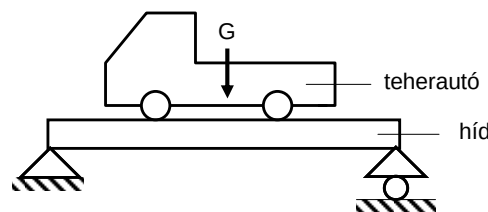
A rúd húzó- és nyomóerő felvételére képes.

kötél

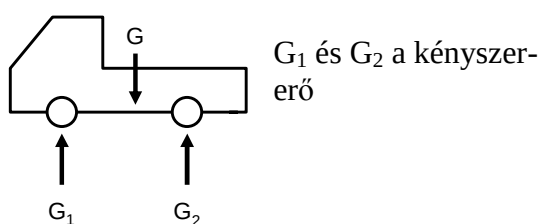


Csak kötéldirányú és csak húzó terhelés felvételére alkalmas.

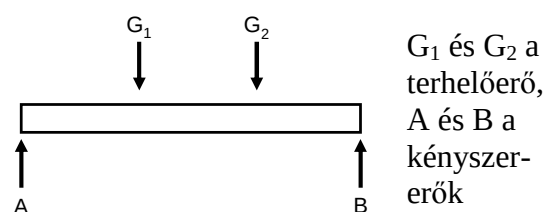
A kényszererők (reakció erők) megértése érdekében vizsgáljuk meg az alábbi esetet.



Ha a teherautó a vizsgált merev test



Ha a hidat vizsgáljuk



2.) Erőrendszerek osztályozása

Az erőrendszer redukálásával kapott eredő vektorkettős elemzésével osztályozhatjuk az erőrendszereket.

Az eredő vektorkettős két tagja az

$$\bar{F}_A = \sum \bar{F}_i \quad \text{és} \quad \bar{M}_A = \sum \bar{M}_i + \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i.$$

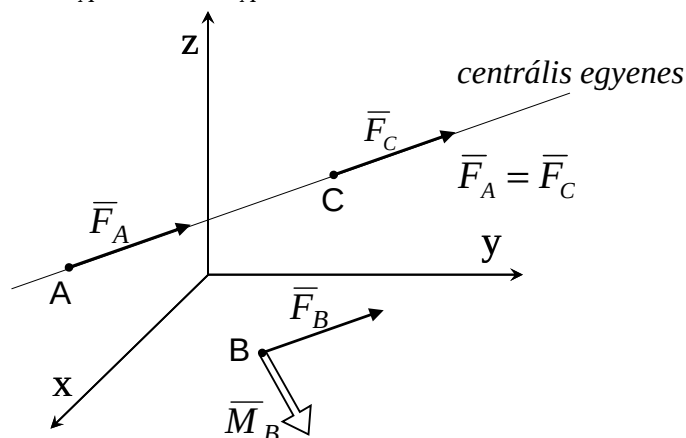
a) $\bar{F}_A = \bar{0} \quad \bar{M}_A = \bar{0}$

Ha mindkét tag külön-külön zérus, akkor az erőrendszert egyensúlyi erőrendszernek nevezzük.

b) $\bar{F}_A = \bar{0} \quad \bar{M}_A \neq \bar{0}$

Ha az eredő vektorkettős erő tagja zérus, de a nyomatéki tagja nem, akkor az erőrendszer a tér bármely pontjában helyettesíthető ezzel a nyomatékvektorral.

c) $\bar{F}_A \neq \bar{0} \quad \bar{M}_A = \bar{0}$



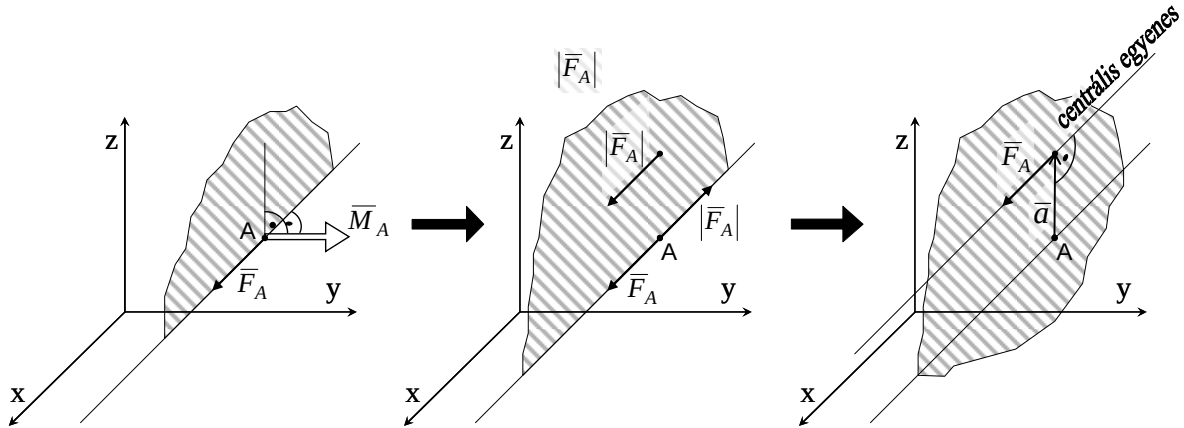
Abban az esetben, amikor az eredő vektorkettős nyomatéki tagja zérus értékű, de az erőkomponens nem nulla, az eredő egyetlen erőként adható meg a kijelölt pontban. A pont és az eredő által meghatározott egyenes a centrális egyenes, melyre jellemző, hogy minden pontjában zérus az eredő vektorkettős nyomatéki tagja.

Az eredő vektorkettős további elemzésénél már egyik tag sem lehet zérus ($\bar{F}_A \neq \bar{0}$ és $\bar{M}_A \neq \bar{0}$). Ekkor két esetet különböztetünk meg:

$\bar{F}_A \cdot \bar{M}_A = 0$ - a két vektor merőleges egymásra.

$\bar{F}_A \cdot \bar{M}_A \neq 0$ - a két vektor általános helyzetű egymáshoz képest.

d) $\vec{F}_A \neq \vec{0}$, $\vec{M}_A \neq \vec{0}$ és $\vec{F}_A \cdot \vec{M}_A = 0$



Az $\vec{M}_A$ nyomaték tetszőleges erőpárrá bontható fel. Válasszuk ki ezek közül azt, amelyiknél az erő értéke megegyezik az $\vec{F}_A$ erő abszolútértékével.

Toljuk el ezt az erőpárt úgy, hogy az erőpár egyik erője és az eredeti erő egy hatásvonalon helyezkedjék el. Ekkor a két erő kiegyensúlyozza egymást, és az eredmény egyetlen, (A ponthoz képest) eltolás hatásvonalú $\vec{F}_A$ erő lesz.

Az eltolás mértékének - $\vec{a}$ vektor - meghatározását az alábbi megfontolások alapján végezzük:

Mivel az $\vec{M}_A$ nyomatékot bontottuk fel erőpárra, ezért

$$\vec{a} \times \vec{F}_A = \vec{M}_A.$$

Szorozzuk meg a vektoregyenletet balról $\vec{F}_A$ vektorral vektoriálisan.

$$\vec{F}_A \times (\vec{a} \times \vec{F}_A) = \vec{F}_A \times \vec{M}_A$$

A kifejtési tétel értelmében

$$\vec{a}(\vec{F}_A \cdot \vec{F}_A) - \vec{F}_A(\vec{F}_A \cdot \vec{a}) = \vec{F}_A \times \vec{M}_A.$$

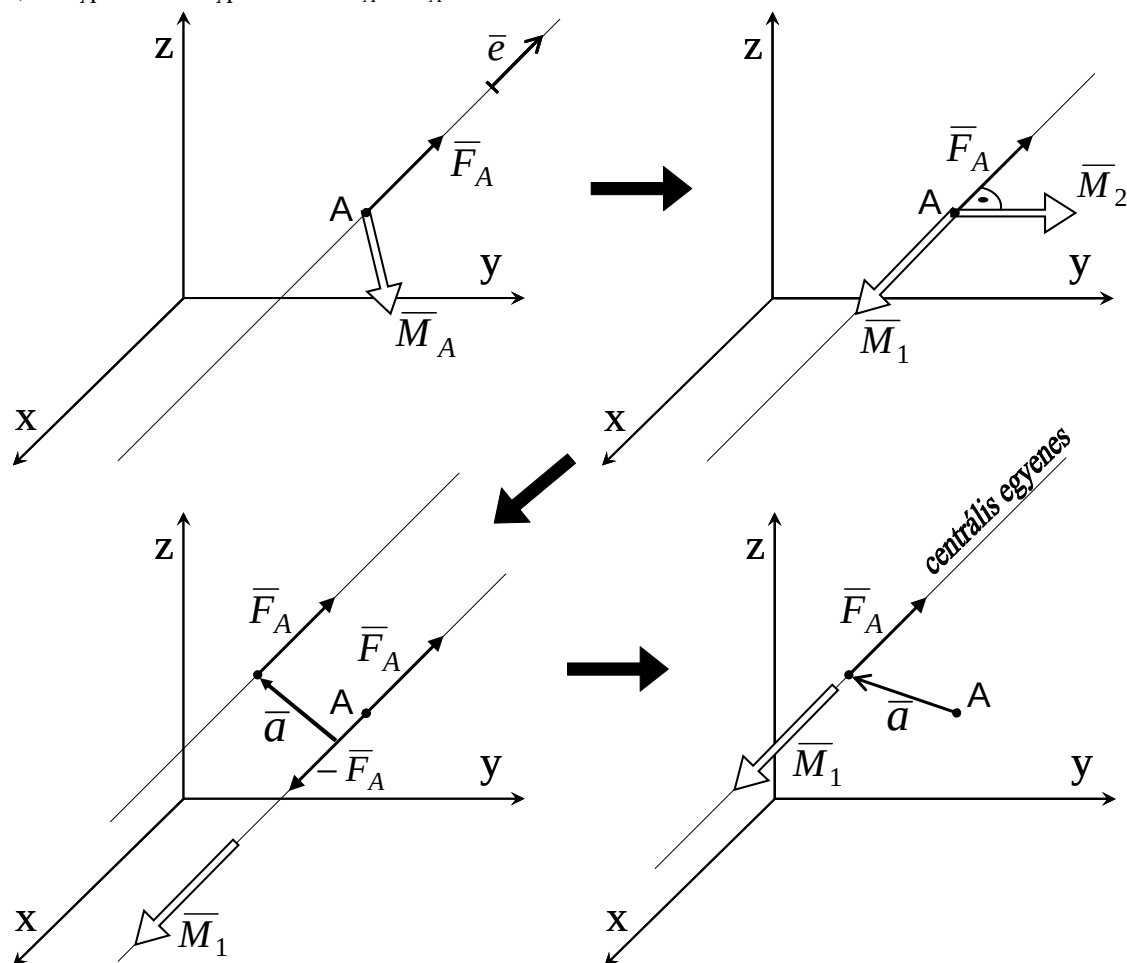
Kössük ki, hogy azt az $\vec{a}$ vektort keressük, amely merőleges az $\vec{F}_A$ -ra, így a centrális egyenesre is.

Ekkor az $\vec{F}_A \cdot \vec{a} = 0$, mivel a két vektor merőleges egymásra.

$$\text{Így } \vec{a}(\vec{F}_A \cdot \vec{F}_A) = \vec{F}_A \times \vec{M}_A$$

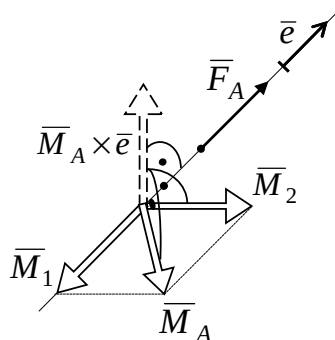
$$\text{és } \vec{a} = \frac{\vec{F}_A \times \vec{M}_A}{F_A^2}.$$

e) $\bar{F}_A \neq \bar{0}$, $\bar{M}_A \neq \bar{0}$ és $\bar{F}_A \cdot \bar{M}_A \neq 0$



Bontuk fel az $\bar{M}_A$ nyomatékvektort egy az erő irányába eső és egy erre merőleges komponensre.

$$\bar{M}_1 = (\bar{M}_A \cdot \bar{e}) \cdot \bar{e} = \left(\bar{M}_A \cdot \frac{\bar{F}_A}{|\bar{F}_A|} \right) \cdot \frac{\bar{F}_A}{|\bar{F}_A|} = \frac{1}{F_A^2} \cdot \bar{F}_A \cdot (\bar{M}_A \cdot \bar{F}_A)$$



Az $(\bar{M}_A \times \bar{e})$ vektor abszolútértéke éppen az $\bar{M}_2$ vektor abszolútértékével egyezik meg.

Az $\bar{e} \times (\bar{M}_A \times \bar{e})$ pedig az $\bar{M}_2$ -t adja.

Tehát

$$\bar{M}_2 = \bar{e} \times (\bar{M}_A \times \bar{e}) = \frac{\bar{F}_A}{|\bar{F}_A|} \times \left(\bar{M}_A \times \frac{\bar{F}_A}{|\bar{F}_A|} \right) = \frac{1}{F_A^2} \cdot \bar{F}_A \times (\bar{M}_A \times \bar{F}_A)$$

.Az előző esethez hasonlóan az $\bar{M}_2$ felbontásából származik az eltolás, tehát igaz, hogy

$$\bar{a} \times \bar{F}_A = \bar{M}_2 = \frac{1}{F_A^2} \bar{F}_A \times (\bar{M}_A \times \bar{F}_A) = -\frac{1}{F_A^2} (\bar{M}_A \times \bar{F}_A) \times \bar{F}_A,$$

$$\text{vagyis } \bar{a} = -\frac{1}{F_A^2} (\bar{M}_A \times \bar{F}_A) = \frac{1}{F_A^2} (\bar{F}_A \times \bar{M}_A).$$

Az $\vec{M}_1$ nyomatékvektor önmagával párhuzamosan szabadon eltolható. Így a legegyszerűbb eredő a centrális egyenesben ható $\vec{F}_A$ erő és $\vec{M}_1$ nyomaték. Az $\vec{M}_1$ vektort szokás főerőpárnak is nevezni.

Ha ez az eredő vektorkettős egy merev testre hat, akkor az erő része haladó mozgásra, míg a nyomatéki része forgásra kényszeríti a testet. Így a mozgás hasonló a csavarmozgáshoz és ezért az ilyen erőrendszert erőcsavarnak is nevezik.

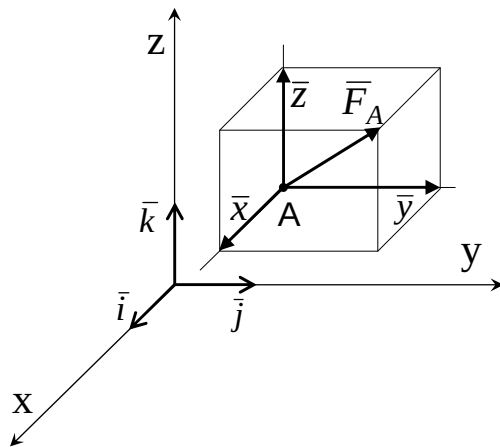
3.) Egyensúlyi erőrendszerek

Az erőrendszerek osztályozásánál megállapítottuk, hogy egyensúlyi erőrendszerről akkor beszélünk, ha az eredő vektorkettős mindkét tagja zérus, vagyis

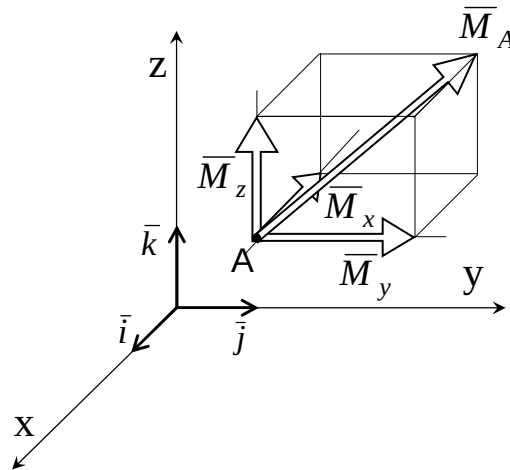
$$\vec{F}_A = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

és a tér bármely pontjára

$$\vec{M}_A = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}.$$



$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \bar{x} &= x\vec{i} \\ \bar{y} &= y\vec{j} \\ \bar{z} &= z\vec{k}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \\ \vec{M}_x &= M_x\vec{i} \\ \vec{M}_y &= M_y\vec{j} \\ \vec{M}_z &= M_z\vec{k}\end{aligned}$$

A két egyensúlyt kifejező vektoregyenlet külön-külön skalár egyenletekkel is leírható.

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{0} \\ x &= \sum x_i = 0 \\ y &= \sum y_i = 0 \\ z &= \sum z_i = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \\ M_x &= 0 \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 0\end{aligned}$$

Az egyensúly feltételét más módon is megfogalmazhatjuk. Egyensúlyi erőrendszerről akkor beszélünk, ha a vizsgált erőrendszer a tér három, nem egy egyenesre eső pontjára számított nyomatéka zérusértékű.

$$\bar{M}_A = \bar{0}$$

$$\bar{M}_B = \bar{0}$$

$$\bar{M}_C = \bar{0}$$

Ennél a megfogalmazásnál nem tettünk említést az eredő erőről. Bizonyítható, hogy a három nyomatéki egyenlet zérus volta csak úgy lehetséges, ha az $\bar{F} = \bar{0}$.

Írjuk föl a B és C pontokra a nyomatékokat az $\bar{M}_A$ segítségével:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_A + \bar{r}_{BA} \times \bar{F} \rightarrow \bar{0} = \bar{0} + \bar{r}_{BA} \times \bar{F}$$

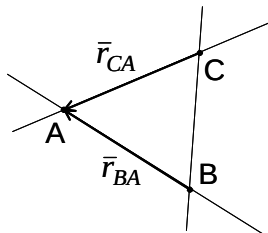
$$\bar{M}_C = \bar{M}_A + \bar{r}_{CA} \times \bar{F} \rightarrow \bar{0} = \bar{0} + \bar{r}_{CA} \times \bar{F}$$

Az egyenleteket rendezve:

$$\bar{0} = \bar{r}_{BA} \times \bar{F}, \text{ illetve } \bar{0} = \bar{r}_{CA} \times \bar{F}.$$

A vektori szorzat akkor lehet zérus értékű, ha két vektor párhuzamos, vagy legalább az egyik tényező zérus értékű.

Az ábrán látható, hogy $\bar{r}_{BA} \neq \bar{0}$ és $\bar{r}_{CA} \neq \bar{0}$.



Továbbá igaz az is, hogy egy zérustól különböző $\bar{F}$ vektor egyszerre nem lehet párhuzamos az $\bar{r}_{BA}$ -val és az $\bar{r}_{CA}$ -val. Ebből következik, hogy az $\bar{F}$ erő értéke valóban zérus.

A három vektoregyenlet skalár egyenletekkel is felírható.

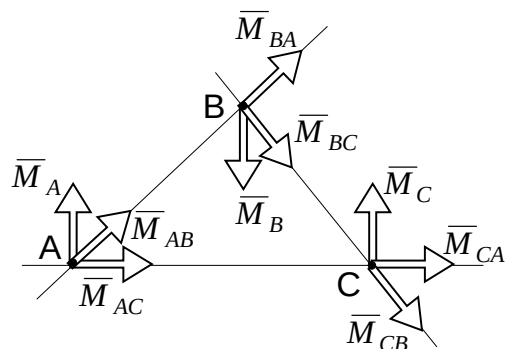
$$M_{Ax} = 0 \quad M_{Bx} = 0 \quad M_{Cx} = 0$$

$$M_{Ay} = 0 \quad M_{By} = 0 \quad M_{Cy} = 0$$

$$M_{Az} = 0 \quad M_{Bz} = 0 \quad M_{Cz} = 0$$

Ezek a skalár egyensúlyi egyenletek azt fejezik ki, hogy az egyes nyomatékvektorok koordináta-tengelyekkel párhuzamos komponense zérus értékű.

A felírt 9 skalár egyenletből azonban csupán hat lineárisan független.



Válasszuk ki úgy a tengelyeket, hogy a három - egy ponton átmenő - tengely közül kettő a másik két ponton is átmenjen. Felhasználva azt a tényt, hogy a tengelyre számított nyomaték (skalár) nem függ attól, hogy a tengely mely pontjához tartozó nyomatékvektorból számítottuk, kapjuk, hogy

$$M_{AB} = M_{BA},$$

$$M_{AC} = M_{CA},$$

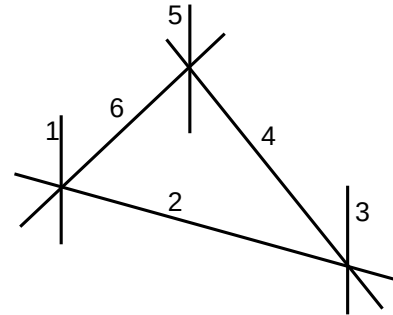
$$M_{BC} = M_{CB},$$

Vagyis a kilenc skaláregyenletből csak hat a lineárisan független. A fentieket figyelembe véve az egyensúly feltételeit a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

Egyensúlyi erőrendszerről beszélünk akkor, ha egymástól lineárisan független 6 tengelyre számított nyomaték zérus.

Az egymástól lineárisan független hat tengely megválasztásának geometriai feltételei az alábbiak:

- háromnál több nem lehet egy síkban (2, 4, 6)
- háromnál több nem lehet párhuzamos (1, 3, 5)
- háromnál több nem mehet át egy ponton
- ötnél több nem illeszkedhet a tér egy egyenesére és a hatodik nem lehet párhuzamos ezzel az egyenessel.



Síkbeli feladatoknál az egyensúly feltételei a következőképpen alakulnak:
Tekintsük az erőrendszer síkjának az xy síkot.

A síkbeli erőrendszer eredő vektorkettőssének erő tagja biztosan benne fekszik az xy síkban.

Így az $\vec{F}_0 = \vec{0}$ vektoregyenletnek csak két skaláregyenlet felel meg, vagyis $\sum x_i = 0$, illetve $\sum y_i = 0$.

A vektorkettős nyomatéki tagja biztosan merőleges az xy síkra, vagyis z tengely irányú.

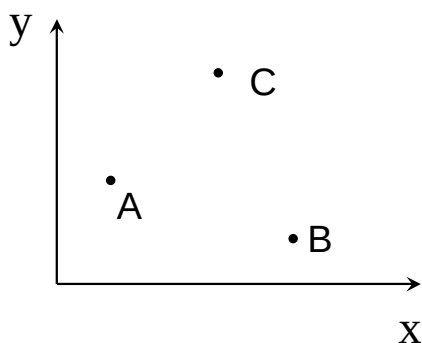
Így az $\vec{M}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + M_z\vec{k}$ alakú, ami skaláregyenlettel felírva $M_z = 0$.

Síkban tehát csak három skaláregyenlet van.

A térben megfogalmazott, három pontra felírt nyomatékvektornak zérus volta a síkban egyszerűsödik. Mivel síkbeli erőrendszer csak a síkra merőleges tengely körül tud forogni, ezért a vektoregyenletek skaláregyenletekké egyszerűsödnek.

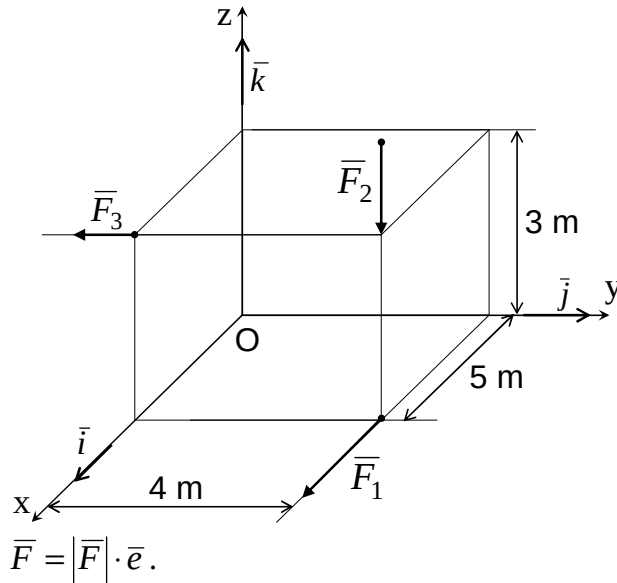
Az $M_A = 0$, $M_B = 0$, $M_C = 0$ egyenletek azt fejezik ki, hogy a megadott pontokon átmenő, az erőrendszer síkjára merőleges tengelyek körül a forgató hatás zérus.

A három pont itt nem eshet egy egyenesre.



4.) Példák az erőrendszerek témakörből

1. példa



Határozzuk meg a térbeli erőrendszer nyomatékát az origóra!

$$|\vec{F}_1| = 80 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_2| = 60 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_3| = 40 \text{ [N]}$$

A téglatest élein ható erők vektorát abból a megfontolásból tudjuk meghatározni, hogy egy vektort az abszolútértéke és az iránya határoz meg, vagyis

A fenti elvek alapján

$$\vec{F}_1 = 80\vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = -60\vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = -40\vec{j}$$

Tekintsük az erők támadáspontjának a hatásvonalakban kijelölt T_1 , T_2 , T_3 pontokat. A pontra számított nyomaték

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

ahol $\vec{r}$ a pontból az erő támadáspontjához húzott vektor. A támadáspontokba mutató vektorok tehát:

$$\vec{r}_1 = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{r}_3 = 5\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$$

Az erőrendszernek az origóra számított nyomatékát az

$$\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \text{ képlet szerint számítjuk.}$$

Az egyes vektoriális szorzások eredményeit az alábbi determinánsok adják:

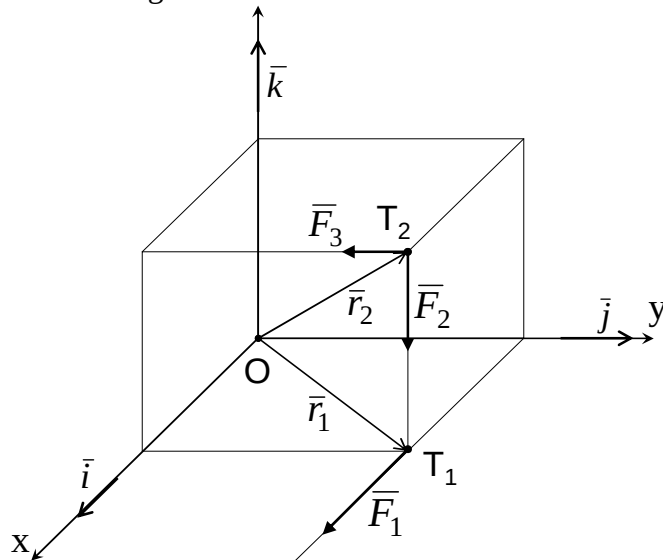
$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 0 \\ 80 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-320) = -320\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -60 \end{vmatrix} = \vec{i}(-240-0) - \vec{j}(-300-0) + \vec{k}(0-0) = -240\vec{i} + 300\vec{j}$$

$$\bar{r}_3 \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & -40 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(0+120) - \bar{j}(0-0) + \bar{k}(-200-0) = 120\bar{i} - 200\bar{k}$$

Ezekkel $\bar{M}_O = -120\bar{i} + 300\bar{j} - 520\bar{k}$.

A merev testre ható erők a hatásvonalukban eltolhatók anélkül, hogy a testre gyakorolt hatásuk megváltozna. Ezt kihasználva a három vektoriális szorzat kettőre csökkenthető.



Az origóra számított nyomatékot a következő két vektori szorzás összegeként is megkaphatjuk:

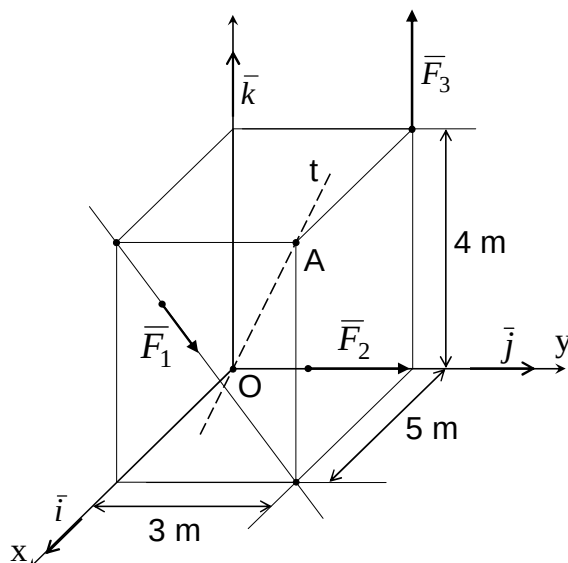
$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = -320\bar{k}$$

$$\bar{r}_2 \times (\bar{F}_2 \times \bar{F}_3) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & -40 & -60 \end{vmatrix} = \bar{i}(-240+120) - \bar{j}(-300-0) + \bar{k}(-200-0) =$$

$$= -120\bar{i} + 300\bar{j} - 200\bar{k}$$

$$\bar{M}_O = -120\bar{i} + 300\bar{j} - 520\bar{k}$$

2. példa



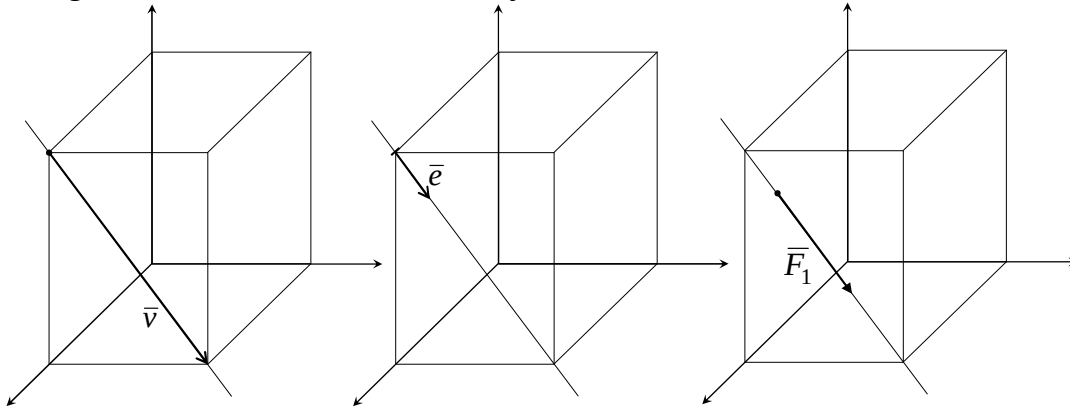
Határozzuk meg a vázolt térbeli erőrendszer nyomatékát az origóra ($\bar{M}_O$), nyomatékát az „A” pontra ($\bar{M}_A$), valamint nyomatékát az „A” ponton átmenő testátlóra, mint tengelyre (M_{At})!

$$|\bar{F}_1| = 100 [N]$$

$$|\bar{F}_2| = 400 [N]$$

$$|\bar{F}_3| = 600 [N]$$

Határozzuk meg először a kijelölt irányokba mutató erővektorokat. Az $\vec{F}_1$ erő vektorának meghatározásánál az alábbiak szerint járunk el:



$$\vec{v} = 0\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

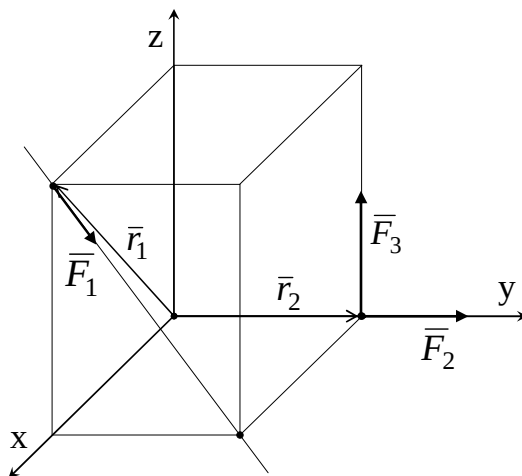
$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{0\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{9+16}} = 0\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} - \frac{4}{5}\vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \cdot \vec{e} = 60\vec{j} - 80\vec{k}$$

A másik két erővektor a koordinátarendszer egységvektorainak irányába mutat, tehát

$$\vec{F}_2 = 400\vec{j} \quad \vec{F}_3 = 600\vec{k}$$

A nyomatékszámításhoz rögzítsük az erők támadáspontját:



$$\vec{r}_1 = 5\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$$

Az origóra számított nyomatékot az alábbiak szerint kapjuk:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

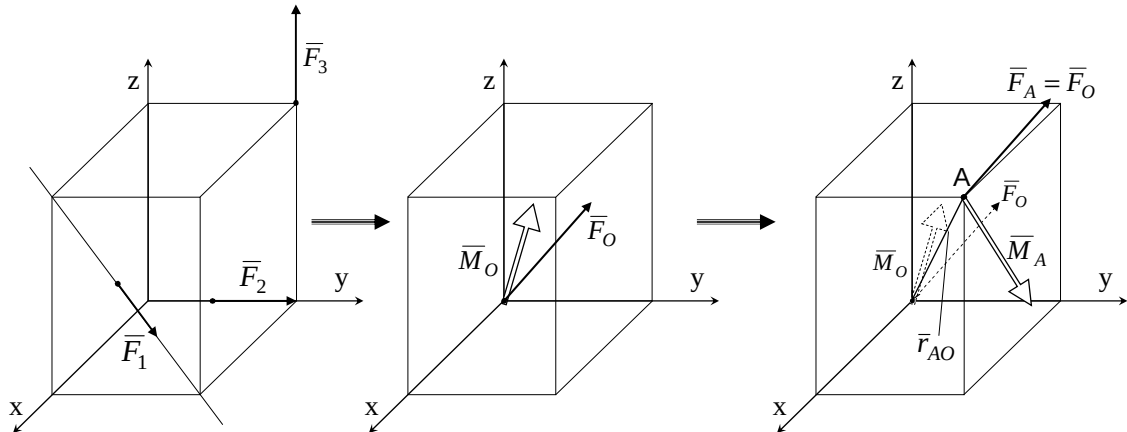
A vektori szorzatok eredményeit a következő két determináns adja:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 60 & -80 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 240) - \vec{j}(-400 - 0) + \vec{k}(300 - 0) = -240\vec{i} + 400\vec{j} + 300\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 400 & 600 \end{vmatrix} = \vec{i}(1800 - 0) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(0 - 0) = 1800\vec{i}$$

Az origóra számított nyomaték: $\bar{M}_O = 1560\bar{i} + 400\bar{j} + 300\bar{k}$

Az erőrendszer eredője: $\bar{F} = \sum \bar{F}_i = 0\bar{i} + 460\bar{j} + 520\bar{k}$



Az origóhoz kötött eredő vektorkettős tehát: $\bar{F}_O$ és $\bar{M}_O$.

Amennyiben ismerjük az erőrendszer nyomatékát a tér egy pontjára, valamint az eredő erőt, úgy ezek segítségével könnyedén meghatározhatóak a más pontokhoz tartozó nyomatékvektorok.

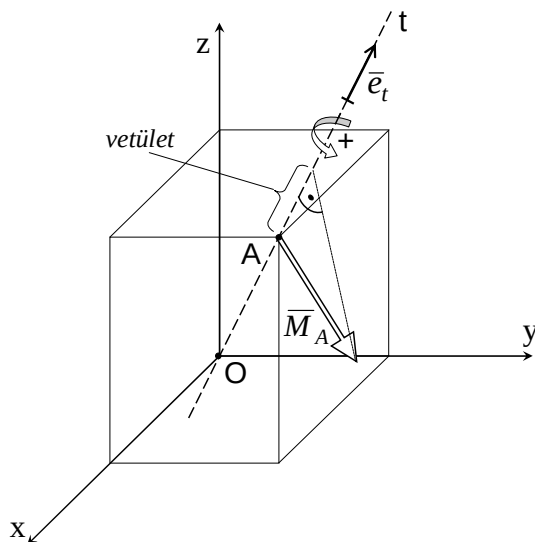
$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}_O = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \sum \bar{F}$$

A kijelölt vektori szorzat értéke

$$\bar{r}_{AO} \times \sum \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & -3 & -4 \\ 0 & 460 & 520 \end{vmatrix} = \bar{i}(-1560 + 1840) - \bar{j}(-2600 - 0) + \bar{k}(-2300 - 0) =$$

$$= 280\bar{i} + 2600\bar{j} - 2300\bar{k}$$

Az „A” pontra számított nyomaték tehát $\bar{M}_A = 1840\bar{i} + 3000\bar{j} - 2000\bar{k}$



A tengelyre számított nyomatékot úgy kapjuk meg, hogy a tengely egy pontjához tartozó nyomatékvektort megszorozzuk a tengely egységvektorával (tehát kiszámítjuk a nyomatékvektor vetületét a tengelyre).

Az $\bar{e}_t$ egységvektort a következőképpen állíthatjuk elő:

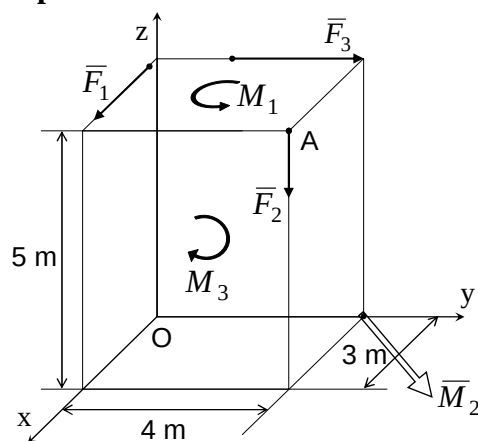
$$\bar{e}_t = \frac{\bar{v}_{OA}}{|\bar{v}_{OA}|} = \frac{5\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}}{\sqrt{25 + 9 + 16}} = \frac{5\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}}{5\sqrt{2}}$$

A tengelyre számított nyomaték

$$M_t = \bar{M}_A \cdot \bar{e}_t = [1840, 3000, -2000] \begin{bmatrix} \frac{5}{5\sqrt{2}} \\ \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} (9200 + 9000 - 8000) = \frac{10200}{5\sqrt{2}} = \frac{2040}{\sqrt{2}} = 1020\sqrt{2} \text{ [Nm]}$$

A számított vetület értéke pozitív. Ez azt jelenti, hogy a tengely felvett egységvektorával szembenézve a forgatóhatás az óramutató járásával ellentétes.

3. példa



Határozzuk meg a vázolt térbeli erőrendszer nyomatékát az „A” pontra!

$$|\bar{F}_1| = 200 \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_2| = 100 \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_3| = 400 \text{ [N]}$$

$$M_1 = 400 \text{ [Nm]} \text{ (xy síkkal párhuzamos lapon)}$$

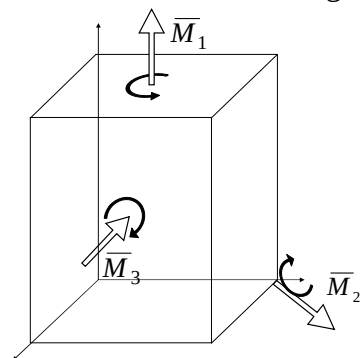
$$M_3 = 700 \text{ [Nm]} \text{ (yz síkkal párhuzamos lapon)}$$

$$\bar{M}_2 = 100\bar{i} + 200\bar{j} - 300\bar{k} \text{ [Nm]}$$

Első lépésként írjuk fel az erők és nyomatékok vektorát:

$$\bar{F}_1 = 200\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} \quad \bar{F}_2 = 0\bar{i} + 0\bar{j} - 100\bar{k} \quad \bar{F}_3 = 0\bar{i} + 400\bar{j} + 0\bar{k}$$

A nyomatékok vektorának meghatározásánál abból kell kiindulni, hogy a nyomatékvektorral szembenézve a forgatóhatás az óramutató járásával ellentétes kell, hogy legyen.



A nyomatékvektorok ennek szellemében a következők:

$$\bar{M}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 400\bar{k}$$

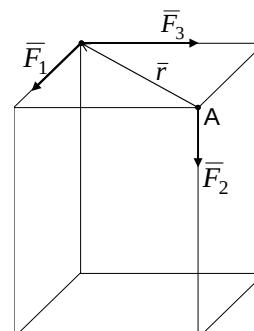
$$\bar{M}_2 = 100\bar{i} + 200\bar{j} - 300\bar{k}$$

$$\bar{M}_3 = -700\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

Ezekkel:

$$\sum \bar{M}_i = -600\bar{i} + 200\bar{j} + 100\bar{k}$$

Az $\bar{F}_2$ erőnek az „A” pontra a nyomatéka zérus, hiszen átmegy a ponton. Az erő karja zérus.



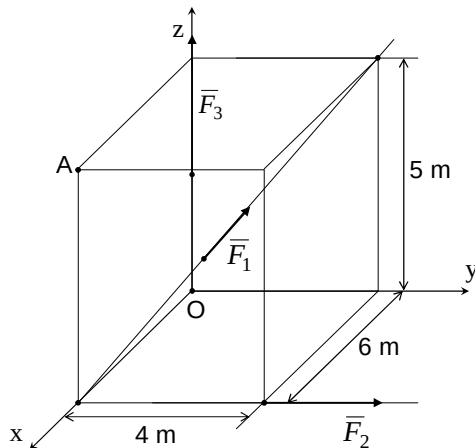
Az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_3$ erők nyomatékát egy lépésben ki lehet számítani, hiszen e két erőnek ugyanazon támadáspontot jelöltük ki.

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 0 \\ 200 & 400 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(-1200+800) = -400\vec{k}$$

Az „A” pontra számított nyomaték tehát

$$\vec{M}_A = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = (-600\vec{i} + 200\vec{j} + 100\vec{k}) + (-400\vec{k}) = -600\vec{i} + 200\vec{j} - 300\vec{k}$$

4. feladat



Határozza meg az erőrendszer nyomatékát az „A” pontra!

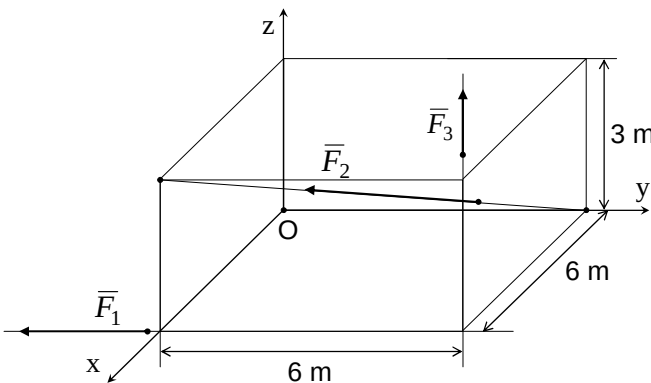
$$|\vec{F}_1| = 10\sqrt{77} \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_2| = 200 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_3| = 300 \text{ [N]}$$

$$\text{Eredmény: } \vec{M}_A = 960\vec{i} + 1740\vec{j} + 0\vec{k}$$

5. feladat



Határozza meg az erőrendszer nyomatékát az origóra!

$$|\vec{F}_1| = 800 \text{ [N]}$$

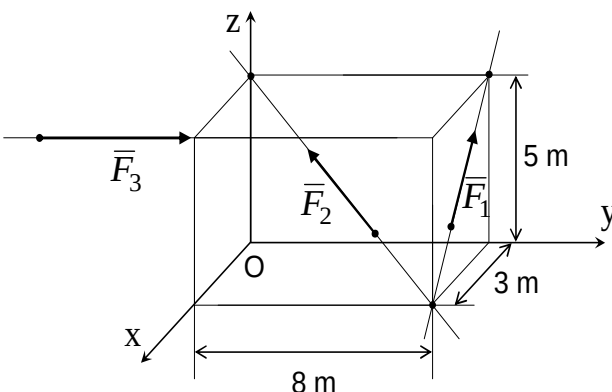
$$|\vec{F}_2| = 900 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_3| = 200 \text{ [N]}$$

Eredmény:

$$\vec{M}_O = 3000\vec{i} - 1200\vec{j} - 8400\vec{k}$$

6. feladat



Határozza meg a vázolt erőrendszer eredő vektorkettőssét az origóra!

$$|\vec{F}_1| = 10\sqrt{34} \text{ [N]} \quad |\vec{F}_2| = 10\sqrt{98} \text{ [N]}$$

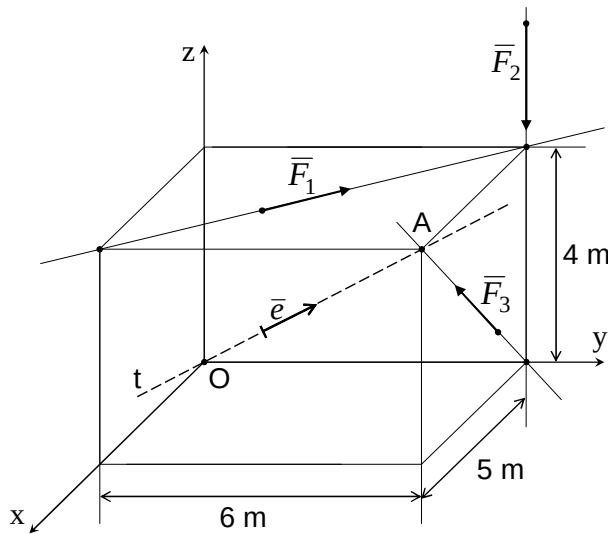
$$|\vec{F}_3| = 200 \text{ [N]}$$

Eredmény:

$$\vec{F}_O = -60\vec{i} + 120\vec{j} + 100\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = -200\vec{i} - 300\vec{j} + 840\vec{k}$$

7. feladat



Határozza meg az eredő vektorkettőst az „A” pontra ($\bar{F}_A$, $\bar{M}_A$), valamint az „A” ponton átmenő testátlóra a nyomatékok (M_t)!

$$|\bar{F}_1| = 10\sqrt{61} \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_2| = 400 \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_3| = 10\sqrt{41} \text{ [N]}$$

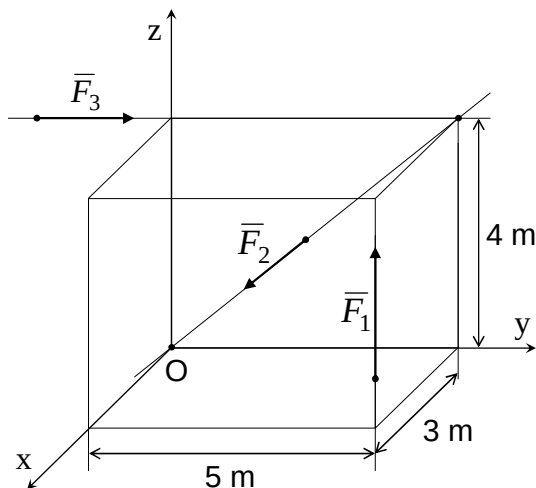
Eredmények:

$$\bar{F}_A = 60\bar{j} - 360\bar{k} \text{ [N]}$$

$$\bar{M}_A = -2000\bar{j} - 300\bar{k} \text{ [Nm]}$$

$$M_t = -\frac{13200}{\sqrt{77}} = -1504,28 \text{ [Nm]}$$

8. példa



Határozzuk meg az eredő vektorkettőst az origóra ($\bar{F}_O$, $\bar{M}_O$)!

Határozzuk meg a centrális egyenes egy pontját, illetve a főerőpárt ($\bar{a}$, $\bar{M}_1$)!

$$|\bar{F}_1| = 400 \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_2| = 10\sqrt{41} \text{ [N]}$$

$$|\bar{F}_3| = 200 \text{ [N]}$$

Az origóhoz tartozó vektorkettőst az alábbi ábra alapján határozzuk meg:

$$\bar{F}_1 = 400\bar{k}$$

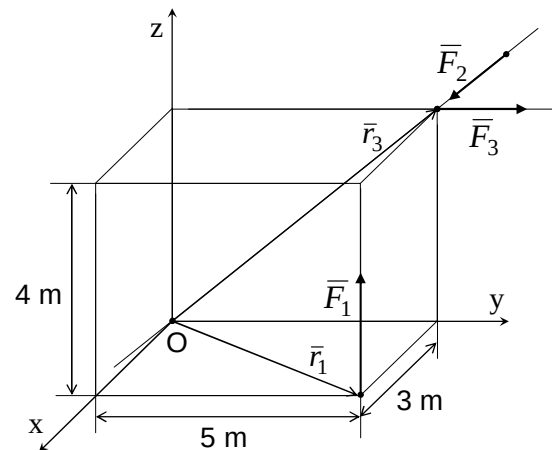
$$\bar{F}_2 = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \cdot |\bar{F}_2| = \frac{0\bar{i} - 5\bar{j} - 4\bar{k}}{\sqrt{25+16}} \cdot 10\sqrt{41} =$$

$$= 0\bar{i} - 50\bar{j} - 40\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = 0\bar{i} + 200\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{F}_O = \sum \bar{F}_i = 0\bar{i} + 150\bar{j} + 360\bar{k} \text{ [N]}$$

Az $\bar{F}_2$ erőnek nincsen nyomatéka az origóra, az erő karja zérus.



$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{vmatrix} = \bar{i}(2000 - 0) - \bar{j}(1200 - 0) + \bar{k}(0 - 0) = 2000\bar{i} - 1200\bar{j}$$

$$\bar{r}_3 \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 200 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(0 - 800) - \bar{j}(0 - 0) + \bar{k}(0 - 0) = -800\bar{i}$$

$$\bar{M}_O = 1200\bar{i} - 1200\bar{j} + 0\bar{k} \text{ [Nm]}$$

A centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektort az

$\bar{a} = \frac{1}{\bar{F}_O^2} (\bar{F}_O \times \bar{M}_O)$ összefüggés alapján számíthatjuk.

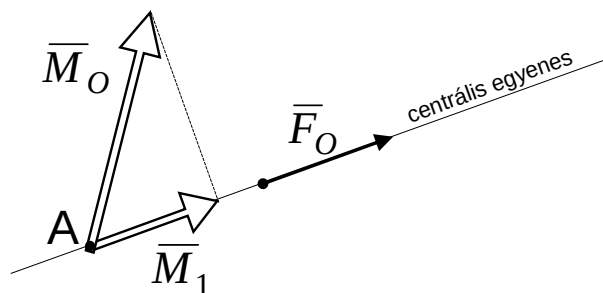
$$\bar{F}_O^2 = 0^2 + 150^2 + 360^2 = 152100$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_O \times \bar{M}_O &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 150 & 360 \\ 1200 & -1200 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(0 + 360 \cdot 1200) - \bar{j}(0 - 360 \cdot 1200) + \bar{k}(0 - 150 \cdot 1200) = \\ &= 432000\bar{i} + 432000\bar{j} - 180000\bar{k} \end{aligned}$$

Ezzel

$$\bar{a} = \frac{432000}{152100}\bar{i} + \frac{432000}{152100}\bar{j} - \frac{180000}{152100}\bar{k} = 2,84\bar{i} + 2,84\bar{j} - 1,18\bar{k} \text{ [m]}.$$

A főerőpár - melynek vektora a centrális egyenesben fekszik - párhuzamos az $\bar{F}_O$ vektorral.

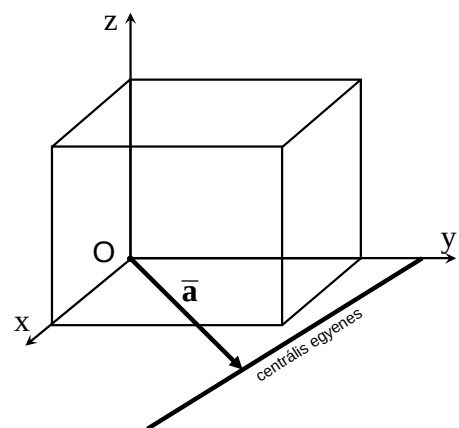


$$\bar{M}_1 = \frac{1}{\bar{F}_O^2} \cdot (\bar{F}_O \bar{M}_O) \cdot \bar{F}_O$$

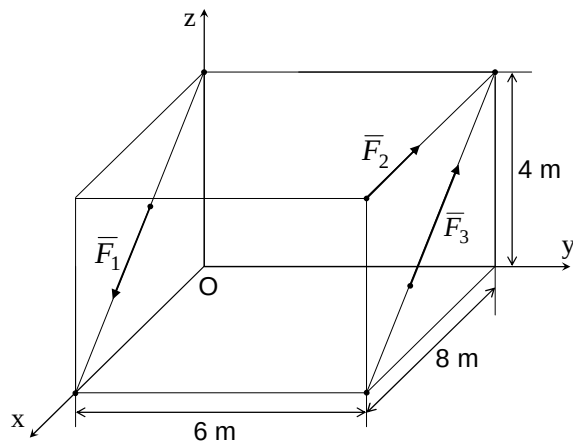
$$\bar{F}_O \bar{M}_O = [0, 150, 360] \begin{bmatrix} 1200 \\ -1200 \\ 0 \end{bmatrix} = -180000$$

$$\begin{aligned} (\bar{F}_O \bar{M}_O) \cdot \bar{F}_O &= -180000 \cdot [0, 150, 360] = \\ &= 0\bar{i} - 180000 \cdot 150\bar{j} - 180000 \cdot 360\bar{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= 0\bar{i} - \frac{180000 \cdot 150}{152100}\bar{j} - \frac{180000 \cdot 360}{152100}\bar{k} = \\ &= 0\bar{i} - 177,52\bar{j} - 426,04\bar{k} \end{aligned}$$



9. példa



Határozza meg az eredő vektorkettőst az origóra ($\vec{F}_O$, $\vec{M}_O$)!

Határozza meg a centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektort ($\vec{a}$) és a főerőpárt ($\vec{M}_1$)!

$$|\vec{F}_1| = 411\sqrt{80} \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_2| = 400 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_3| = 200\sqrt{80} \text{ [N]}$$

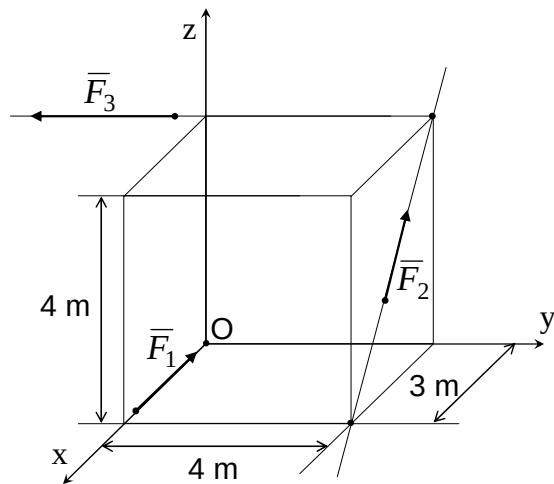
Eredmények: $\vec{F}_O = -1200\vec{i} + 0\vec{j} + 400\vec{k} \text{ [N]}$

$$\vec{M}_O = 4800\vec{i} - 6400\vec{j} + 12000\vec{k} \text{ [Nm]}$$

$$\vec{a} = \frac{256}{160}\vec{i} + \frac{1632}{160}\vec{j} + \frac{768}{160}\vec{k} = 1,8\vec{i} + 10,2\vec{j} + 4,8\vec{k} \text{ [m]}$$

$$\vec{M}_1 = \frac{115200}{160}\vec{i} + 0\vec{j} - \frac{38400}{160}\vec{k} = 720\vec{i} + 0\vec{j} - 240\vec{k} \text{ [Nm]}$$

10. példa



Határozza meg az eredő vektorkettőst az origóra ($\vec{F}_O$, $\vec{M}_O$)!

Határozza meg a centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektort ($\vec{a}$), illetve a főerőpárt ($\vec{M}_1$)!

$$|\vec{F}_1| = 200 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_2| = 100 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_3| = 300 \text{ [N]}$$

Eredmények:

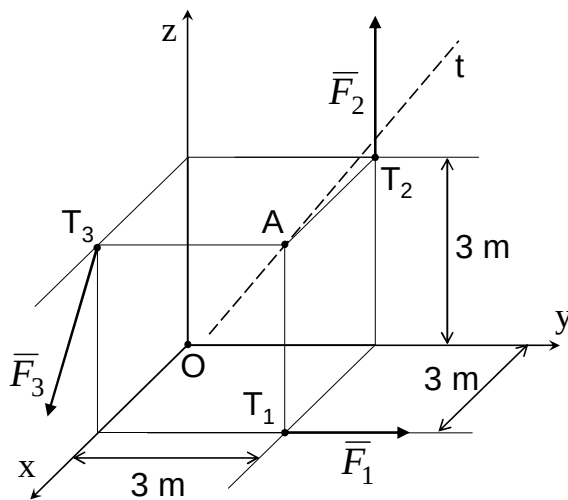
$$\vec{F}_O = -260\vec{i} - 300\vec{j} + 80\vec{k} \text{ [N]}$$

$$\vec{M}_O = 1520\vec{i} - 240\vec{j} + 240\vec{k} \text{ [Nm]}$$

$$\vec{a} = -\frac{528}{1640}\vec{i} + \frac{1840}{1640}\vec{j} + \frac{5184}{1640}\vec{k} = -0,32\vec{i} + 1,12\vec{j} + 3,16\vec{k} \text{ [m]}$$

$$\vec{M}_1 = \frac{79040}{164}\vec{i} + \frac{91200}{164}\vec{j} - \frac{24320}{164}\vec{k} = 481,95\vec{i} + 556,1\vec{j} - 148,29\vec{k} \text{ [Nm]}$$

11. példa



Határozza meg a T_i támadáspontú, $\bar{F}_i$ erőkből álló erőrendszer nyomatékát az A ponton átmenő, $\bar{v}$ irányvektorú egyenesre!

$$T_1[3 \ 3 \ 0][m]$$

$$T_2[0 \ 3 \ 3][m]$$

$$T_3[3 \ 0 \ 3][m]$$

$$A[3 \ 3 \ 3][m]$$

$$\bar{F}_1 = 30\bar{j} [N]$$

$$\bar{F}_2 = 40\bar{k} [N]$$

$$\bar{F}_3 = 30\bar{i} - 40\bar{k} [N]$$

$$\bar{v} = 3\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k}$$

Az erőrendszer nyomatékát az A pontra az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 90\bar{i}$$

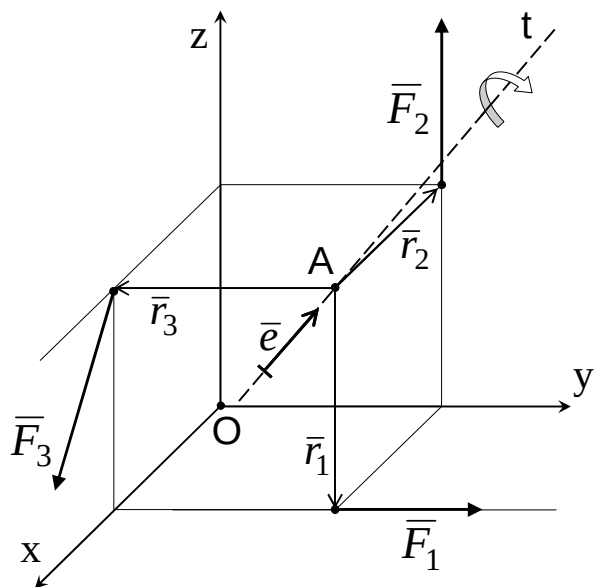
$$\bar{r}_2 \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 120\bar{j}$$

$$\bar{r}_3 \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ 30 & 0 & -40 \end{vmatrix} = 120\bar{i} + 90\bar{k}$$

$$\bar{M}_A = 210\bar{i} + 120\bar{j} + 90\bar{k}$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{3\bar{i} + 6\bar{j} + 6\bar{k}}{\sqrt{9 + 36 + 36}} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$$

$$M_t = \bar{M}_A \cdot \bar{e} = 70 + 80 + 60 = 210 [Nm]$$



12. példa

Határozza meg az alábbiakban megadott T_i támadáspontokkal, illetőleg $\bar{F}_i$ erőkkel jellemezhető erőrendszer nyomatékát az A ponton átmenő, $\bar{v}$ irányvektorú egyenesre (M_t)!

$$T_1(5 \ 3 \ 4)$$

$$T_2(3 \ 3 \ 4)$$

$$T_3(6 \ 8 \ 9)$$

$$\bar{F}_1 = 100\bar{i} + 200\bar{j} + 200\bar{k} [N], \bar{F}_2 = 200\bar{i} + 400\bar{j} + 100\bar{k} [N],$$

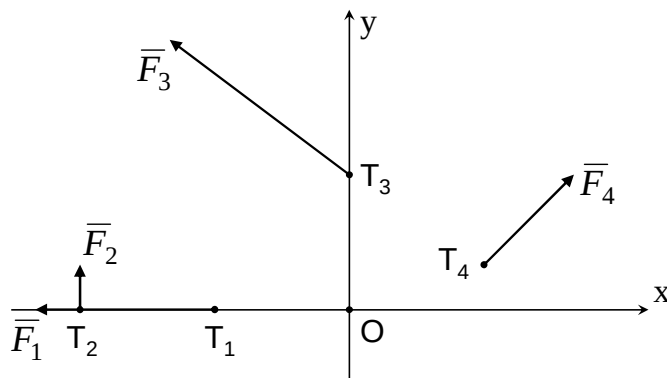
$$\bar{F}_3 = -300\bar{j} - 100\bar{k} [N]$$

$$A(3 \ 4 \ 5)[m]$$

$$\bar{v} = 6\bar{i} + 6\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\text{Eredmény: } M_t = 400 [Nm]$$

13. példa



Határozzuk meg a vázolt síkbeli erőrendszerrel egyenértékű legegyszerűbb eredő erőt számítás-sal!

$T_1(-3,0)$	$\vec{F}_1 = -4\vec{i}$
$T_2(-6,0)$	$\vec{F}_2 = 1\vec{j}$
$T_3(0,3)$	$\vec{F}_3 = -4\vec{i} + 3\vec{j}$
$T_4(3,1)$	$\vec{F}_4 = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

Számítsuk ki először az origóhoz tartozó eredő vektorkettőst ($\vec{F}_O$, $\vec{M}_O$)!

Az eredő erő $\vec{F}_O = \sum \vec{F}_i = -6\vec{i} + 6\vec{j}$.

Az origóra számított nyomatékvektor biztosan merőleges lesz az xy síkra, hiszen a helyvektor is és az $\vec{F}$ vektor is benne van a síkban, a két vektor vektori szorzata pedig merőleges mindkét vektorra. A nyomaték meghatározásának egyik lehetséges módja:

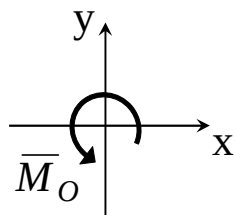
$\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, vagyis

$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{0}$, mivel a két vektor párhuzamos ($\vec{F}_1$ erő átmegy az origón)

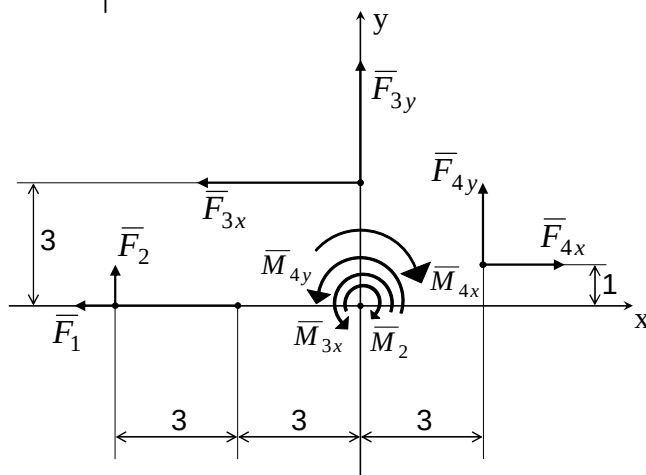
$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-6 - 0) = -6\vec{k}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(0 + 12) = 12\vec{k}$$

$$\vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(6 - 2) = 4\vec{k}$$



Vagyis $\vec{M}_O = 10\vec{k}$, ami koordináta-rendszerben ábrázolva az óramutató járásával ellentétesen forgat.



A síkbeli feladatoknál alkalmazható egy másik módszer is a nyomaték számítására.

Az összes erőnek kiszámíthatjuk a nyomatékát az origón átmenő, a síkra merőleges tengelyre. A számítás eredményét nem befolyásolja, ha az erő helyett annak koordináta tengelyekkel párhuzamos összetevőit használjuk.

$\vec{F}_1$ erőnek nincs nyomatéka, hiszen átmegy a tengelyen.

$$M_2 = 6(m) \cdot 1(N) = 6$$

$$M_{3x} = 3(m) \cdot 4(N) = 12$$

$\bar{F}_{3y}$ -nak a fent említett oknál fogva szintén nincs nyomatéka.

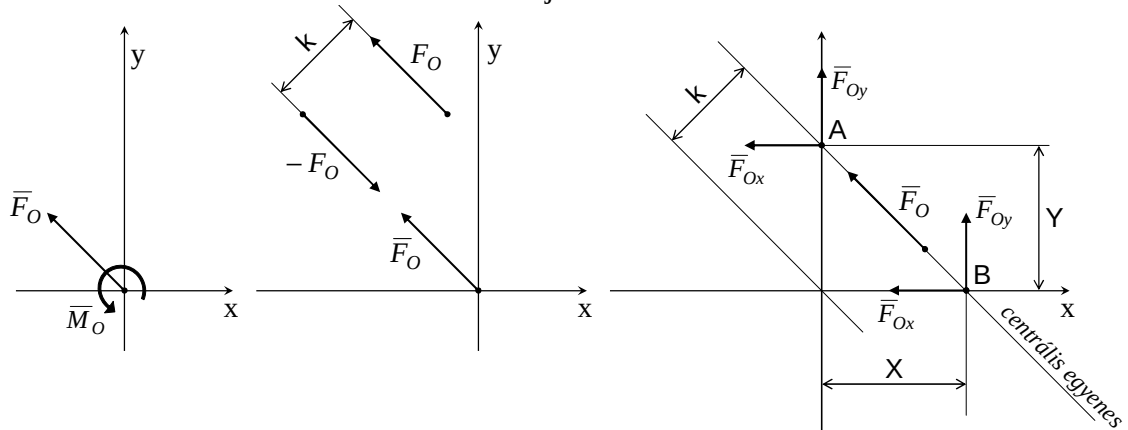
$$M_{4y} = 3(N) \cdot 2(m) = 6$$

$$M_{4x} = 1(m) \cdot 2(N) = 2$$

Ha előjelhelyesen összeadjuk a nyomatékokat, figyelembe véve, hogy az óramutató járásával ellentétes a pozitív nyomaték, akkor

$$M_O = -6 + 12 + 6 - 2 = +10 \text{ Nm}$$

Az eredő számítását az alábbi ábrán mutatjuk be:



Helyettesítsük az M_O nyomatékokat egy olyan erőpárral, amelynek erőtagja éppen $|\bar{F}_O|$ nagyságú. Toljuk el az erőpárt olyan állásba, hogy két erő kiegyenlítse egymást. A változott erőrendszer eredője tehát egyetlen erő, mely a centrális egyenesben hat.

A centrális egyenes és a koordinátatengelyek metszéspontja a következő megfontolások alapján számítható:

Az erő a saját hatásvonalán eltolható. Tegyük fel, hogy az $\bar{F}_O$ erő az A pontban helyezkedik el. Bontsuk fel az erőt komponenseire (F_{Ox} , F_{Oy}). Az $\bar{F}_O$ erőnek az origóra számított nyomatéka megegyezik a komponens erők origóra számított nyomatékával, illetve az M_O nyomatékkal.

Az F_{Oy} -nak az origóra számított nyomatéka zérus, hiszen a hatásvonala átmegy a ponton, így csak az F_{Ox} -nek lesz nyomatéka.

$$F_{Ox} \cdot Y = M_O$$

amiből

$$Y = \frac{M_O}{F_{Ox}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ m}$$

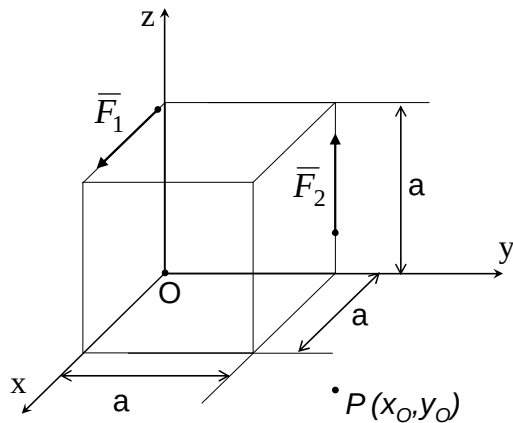
Az x tengellyel való metszéspontot hasonló gondolatmenettel kapjuk, de itt a B pontban bontjuk föl az $\bar{F}_O$ erőt.

$$F_{Oy} \cdot X = M_O$$

amiből

$$X = \frac{M_O}{F_{Oy}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ m}$$

14. példa



Az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ erőkből álló erőrendszer centrális egyenesre melyik pontban dőli át az xy síkot?

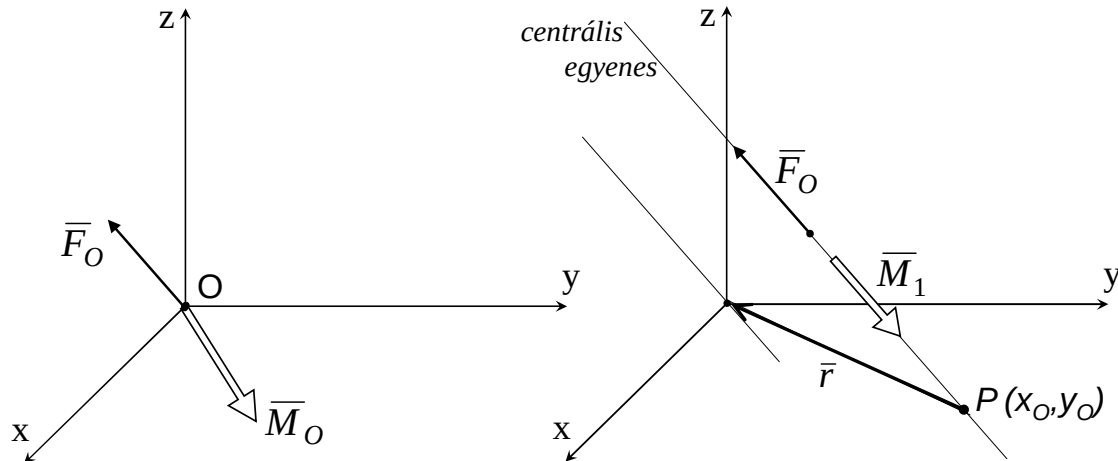
$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 3 \text{ N}$$

A kocka élhossza $a = 20 \text{ cm}$

Első lépésként határozzuk meg az origóhoz kötött eredő vektorkettőt.

$$\vec{F}_O = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = |\vec{F}_1| \cdot a \cdot \vec{j} + |\vec{F}_2| \cdot a \cdot \vec{i} = |\vec{F}| \cdot a \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 60(\vec{i} + \vec{j}) [\text{Ncm}]$$



Az $\vec{F}_O$, $\vec{M}_O$ eredő vektorkettősből létrehozható a centrális egyenesben egy olyan $\vec{F}_O$, $\vec{M}_1$ erőrendszer, ahol $\vec{F}_O$ és $\vec{M}_1$ párhuzamos. Mivel $\vec{F}_O$ és $\vec{M}_1$ szabadon eltolható a centrális egyenesben, ezért a keresett $P(x_O, y_O)$ pontban is igaz ez az állítás.

Ha kiszámítjuk a $P(x_O, y_O)$ ponthoz tartozó eredő vektorkettőt, akkor az $\vec{F}_O$, $\vec{M}_P$ vektorkettős biztosan párhuzamos egymással, ezért

$$\vec{F}_O \times \vec{M}_P = \vec{0}.$$

A P pontban a nyomaték

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{F}_O.$$

Ha a nyomatékvektort vektoriálisan szorozzuk az $\vec{F}_O$ erővektorral, akkor

$$\vec{F}_O \times (\vec{M}_O + \vec{r} \times \vec{F}_O) = \vec{0}, \text{ illetve}$$

$$\vec{F}_O \times \vec{M}_O = -\vec{F}_O \times (\vec{r} \times \vec{F}_O)$$

ahol $\vec{r} = -x_O\vec{i} - y_O\vec{j} + 0\vec{k}$

Hajtsuk végre a vektori szorzásokat:

$$\vec{F}_O \times \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 60 & 60 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-180) - \vec{j}(0-180) + \vec{k}(180-0) = -180\vec{i} + 180\vec{j} + 180\vec{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_O & -y_O & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}(-3y_O - 0) - \vec{j}(-3x_O - 0) + \vec{k}(0 + 3y_O) =$$

$$= -3y_O\vec{i} + 3x_O\vec{j} + 3y_O\vec{k}$$

$$\vec{F}_O \times (\vec{r} \times \vec{F}_O) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ -3y_O & 3x_O & 3y_O \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - 9x_O) - \vec{j}(9y_O + 9y_O) + \vec{k}(9x_O - 0) =$$

$$= -9x_O\vec{i} - 18y_O\vec{j} + 9x_O\vec{k}$$

Felírva a vektoregyenlet mindkét oldalát

$$-180\vec{i} + 180\vec{j} + 180\vec{k} = 9x_O\vec{i} + 18y_O\vec{j} - 9x_O\vec{k}$$

Látjuk, hogy az egyenlőség

$$x_O = -20 \quad y_O = 10$$

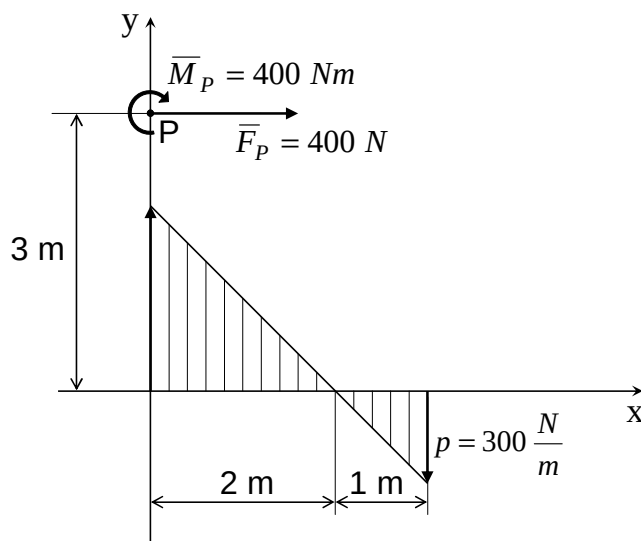
értékkel teljesül.

A döféspont koordinátái tehát

$$x_O = -20 \text{ cm és}$$

$$y_O = 10 \text{ cm.}$$

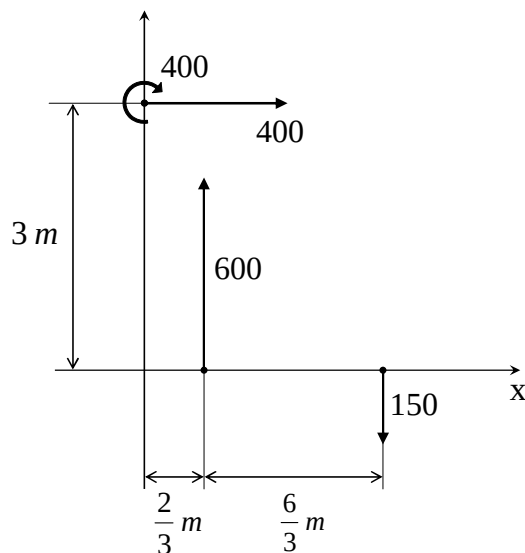
15. példa



Határozzuk meg az origóhoz tartozó eredő vektorkettőst ($\vec{F}_O$, $\vec{M}_O$)!

Hol metszi az eredő erő hatásvonalja az x és y tengelyeket?

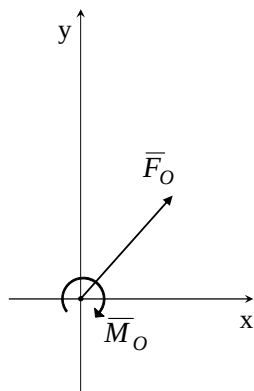
Helyettesítsük a megoszló erőhatást koncentrált erővel:



Az eredő erő $\bar{F}_O = 400\bar{i} + 450\bar{j}$

$$M_O = -400 - 400 \cdot 3 + 600 \cdot \frac{2}{3} - 150 \cdot \frac{8}{3}$$

$$\bar{M}_O = -1600\bar{k}$$

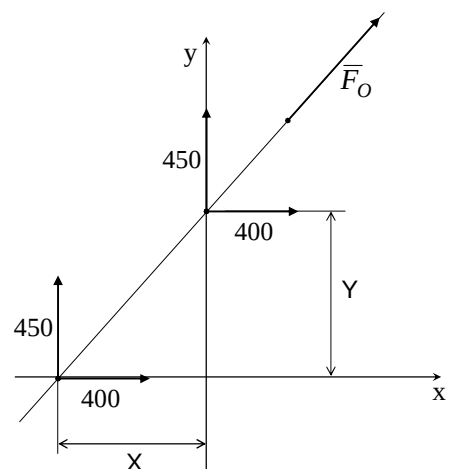
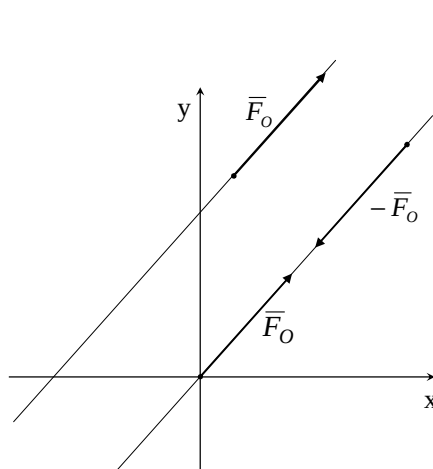


$$400 \cdot Y = M_O$$

$$Y = \frac{1600}{400} = 4 \text{ m}$$

$$450 \cdot X = M_O$$

$$X = \frac{1600}{450} = 3,56 \text{ m}$$



16. példa

Határozzuk meg a térbeli háromrudas bakállványra ható kényszererőket!

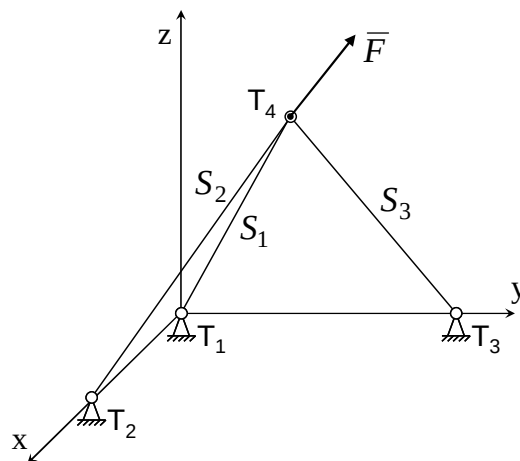
$$T_1(0,0,0)$$

$$T_2(4,0,0)$$

$$T_3(0,8,0)$$

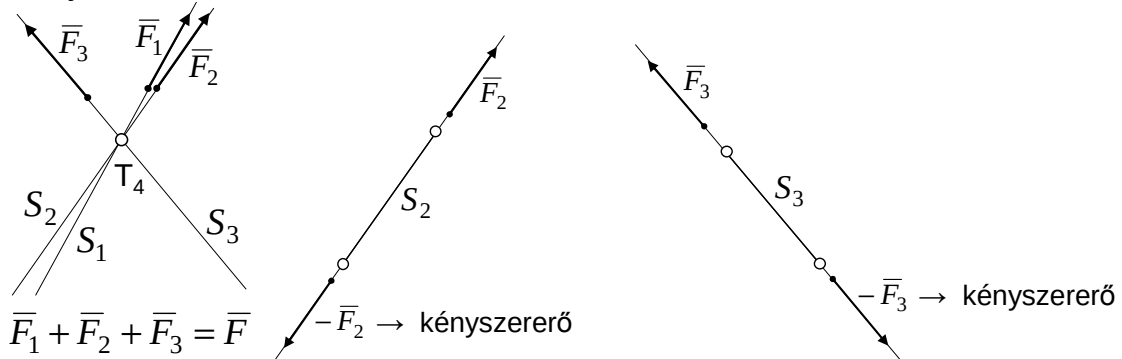
$$T_4(2,4,8)$$

$$\bar{F} = 100\bar{i} + 200\bar{j} + 200\bar{k}$$



A vázolt bakállvány csak csuklóin kap terhelést, ezért az egyes rudak csak rúd iránnyú terhelést kapnak. A feladat megoldása kétféleképpen lehetséges.

a) Bontsuk fel az F erőt három olyan komponensre, amelyek külön-külön a rudak irányába néznek.



Az adott rúd irányába eső erőt teljes egészében a rúd veszi fel. Ebből az erőből a csomópontához kapcsolódó más rudak nem kapnak igénybevételt.

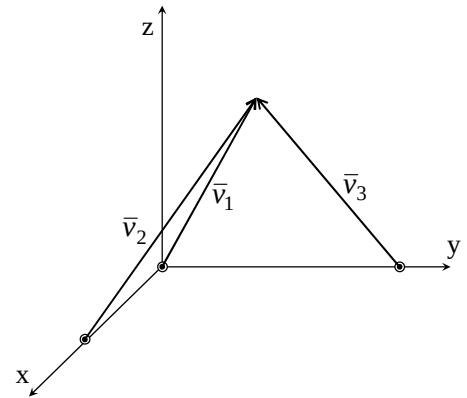
A rúd egyensúlyából látható, hogy az egyensúly fenntartásához a rúd végein két azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőnek kell ébrednie. Ha tehát ismerjük a terhelő erő rúd iránnyú komponenseit, a kényszererők is könnyedén meghatározhatók.

A rudak irányát az ábrán jelölt vektorokkal adhatjuk meg. Az egyes vektorok tehát

$$\bar{v}_1 = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\bar{v}_2 = -2\bar{i} + 4\bar{j} + 8\bar{k}$$

$$\bar{v}_3 = 2\bar{i} - 4\bar{j} + 8\bar{k}$$



A felbontott erő komponensei az előbb meghatározott vektoroktól csak egy skálár számban térnek el, így

$$\bar{F}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1$$

$$\bar{F}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$$

$$\bar{F}_3 = \lambda_3 \bar{v}_3$$

alakban írhatók fel.

A felbontás a következő egyenlettel írható le:

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3$$

Szorozzuk meg a vektoregyenletet jobbról $(\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ vektorral skalárisan.

$$\bar{F} \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = \lambda_1 \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) + \lambda_2 \bar{v}_2 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) + \lambda_3 \bar{v}_3 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$$

A fenti vektoregyenlet utolsó két tagja zérus. Ez a következőkből adódik: a $(\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ egy olyan vektort ad, amely merőleges a $\bar{v}_2$ -re és a $\bar{v}_3$ -ra is. Ha a $\bar{v}_2$ vektort skalárisan megszorozzuk egy rá merőleges $(\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ vektorral, az eredmény zérus. Hasonló az eset a $\bar{v}_3$ vektorral is.

Ezzel

$$\bar{F} \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = \lambda_1 \bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3).$$

Az $\bar{F} \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ és a $\bar{v}_1 \cdot (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ vegyszorzat eredménye skálár, így írható, hogy

$$\lambda_1 = \frac{\bar{F} \cdot \bar{v}_2 \bar{v}_3}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}.$$

Az előző gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy

$$\lambda_2 = \frac{\bar{F} \bar{v}_3 \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3} \quad \text{és} \quad \lambda_3 = \frac{\bar{F} \bar{v}_1 \bar{v}_2}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}.$$

A λ értékeinek meghatározása az alábbi determinánsok kiszámításával lehetséges:

$$\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & 8 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 2(32 + 32) - 4(-16 - 16) + 8(8 - 8) = 256$$

$$\bar{F} \bar{v}_2 \bar{v}_3 = \begin{vmatrix} 100 & 200 & 200 \\ -2 & 4 & 8 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 100(32 + 32) - 200(-16 - 16) + 200(8 - 8) = 12800$$

$$\bar{F} \bar{v}_3 \bar{v}_1 = \begin{vmatrix} 100 & 200 & 200 \\ 2 & -4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 100(-32 - 32) - 200(16 - 16) + 200(8 + 8) = -3200$$

$$\bar{F} \bar{v}_1 \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} 100 & 200 & 200 \\ 2 & 4 & 8 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 100(32 - 32) - 200(16 + 16) + 200(8 + 8) = -3200$$

Ezekkel

$$\lambda_1 = \frac{12800}{256} = 50 \quad \lambda_2 = \frac{-3200}{256} = -12,5$$

$$\lambda_3 = \frac{-3200}{256} = -12,5$$

A felbontás során nyert erőkomponensek

$$\bar{F}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 = 100\bar{i} + 200\bar{j} + 400\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2 = 25\bar{i} - 50\bar{j} - 100\bar{k}$$

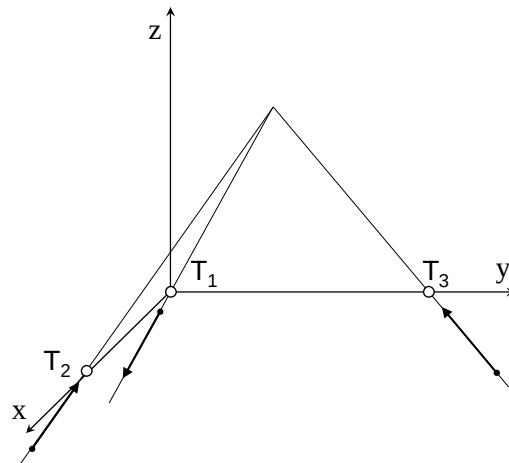
$$\bar{F}_3 = \lambda_3 \bar{v}_3 = -25\bar{i} + 50\bar{j} + 100\bar{k}$$

Az egyes pontokban fellépő reakcióerők tehát

$$T_1 \text{ pontban} \quad -\bar{F}_1 = -100\bar{i} - 200\bar{j} - 400\bar{k}$$

$$T_2 \text{ pontban} \quad -\bar{F}_2 = -25\bar{i} + 50\bar{j} + 100\bar{k}$$

$$T_3 \text{ pontban} \quad -\bar{F}_3 = 25\bar{i} - 50\bar{j} + 100\bar{k}$$



Az $\bar{F} \bar{v}_3 \bar{v}_1$ vegyesszorzat $\bar{v}_1 \bar{F} \bar{v}_3$ alakban, míg az $\bar{F} \bar{v}_1 \bar{v}_2$ vegyesszorzat $\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{F}$ alakban is felírható.

A fenti átalakítást figyelembe véve a λ_i skalár szám kiszámításához használt tört számlálójában található determinánst úgy kapjuk, hogy a $\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3$ vegyesszorzat determinánsának i-edik tagját kicseréljük az $\bar{F}$ erővel.

$$\lambda_1 = \frac{\bar{F} \bar{v}_2 \bar{v}_3}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3} \quad \lambda_2 = \frac{\bar{v}_1 \bar{F} \bar{v}_3}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3} \quad \lambda_3 = \frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{F}}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}$$

b) Egyensúlyozzuk ki az $\vec{F}$ erőt az egyes rudak irányában ható erőkkel, vagyis

$$\vec{F} + \lambda_1^* \vec{v}_1 + \lambda_2^* \vec{v}_2 + \lambda_3^* \vec{v}_3 = \vec{0}$$

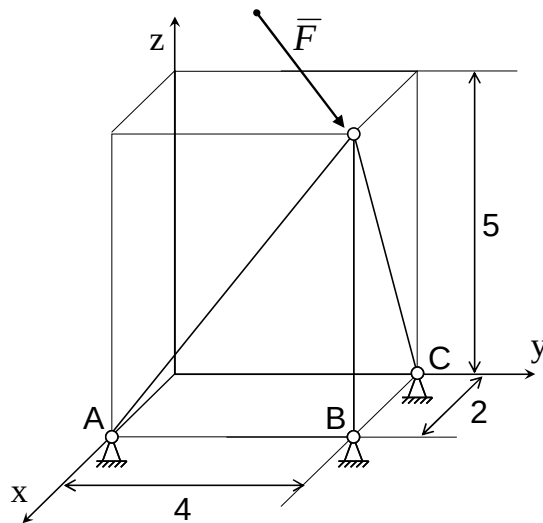
A számítást az előzőekhez teljesen hasonlóan végezhetjük el, azonban a most kapott λ_i^* értékek a λ_i értékeknek (-1)-szeresei lesznek.

Vagyis a $\lambda_i^* \vec{v}_i$ szorzatok rögtön a kényszererőket adják.

$$\lambda_1^* = -50$$

$$\lambda_1^* \vec{v}_1 = -100\vec{i} - 200\vec{j} - 400\vec{k}$$

17. példa



Határozzuk meg az $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$ kényszererőket!

$$\vec{F} = 30\vec{i} + 60\vec{j} - 40\vec{k}$$

Az egyensúlyt leíró vektoregyenlet:

$$\vec{F} + \lambda_1 \vec{v}_A + \lambda_2 \vec{v}_B + \lambda_3 \vec{v}_C = \vec{0}$$

A vektorok

$$\vec{v}_A = 0\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{v}_B = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{v}_C = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}$$

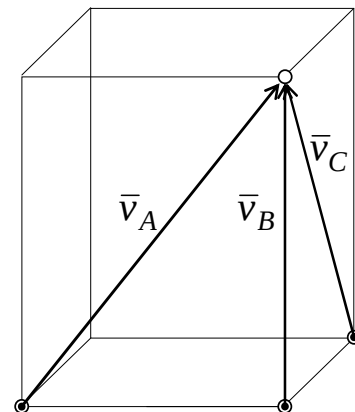
$$\lambda_1 = \frac{-\vec{F} \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C}{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\vec{v}_A \cdot \vec{F} \cdot \vec{v}_C}{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C}$$

$$\lambda_3 = \frac{-\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{F}}{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C}$$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2(20 - 0) = 40$$

$$-\vec{F} \cdot \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C = - \begin{vmatrix} 30 & 60 & -40 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -[-60(0 - 10)] = -600$$



$$-\bar{v}_A \bar{F} \bar{v}_C = - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 30 & 60 & -40 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -[-4(150+80)+5(0-120)] = 1520$$

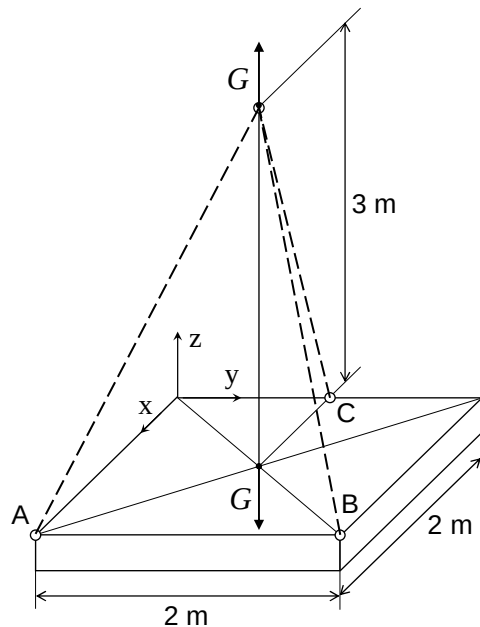
$$-\bar{v}_A \bar{v}_B \bar{F} = - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 30 & 60 & -40 \end{vmatrix} = -[30(20-0)] = -600$$

$$\lambda_1 = \frac{-600}{40} = -15 \quad \lambda_2 = \frac{1520}{40} = 38 \quad \lambda_3 = \frac{-600}{40} = -15$$

$$\bar{F}_A = \lambda_1 \bar{v}_A = 0\bar{i} - 60\bar{j} - 75\bar{k} \quad \bar{F}_B = \lambda_2 \bar{v}_B = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 190\bar{k}$$

$$\bar{F}_C = \lambda_3 \bar{v}_C = -30\bar{i} + 0\bar{j} - 75\bar{k}$$

18. feladat



A négyzet alakú, vízszintes helyzetű, $G = 2400 \text{ N}$ súlyú betonlapot a két sarokpontjához és az oldalél közepéhez rögzített kötelekkel emeljük.

Határozza meg a kötelerők nagyságát!

A merev testre ható erők:

$$\bar{F}_A = -200\bar{i} + 200\bar{j} + 600\bar{k}$$

$$\bar{F}_B = -200\bar{i} - 200\bar{j} + 600\bar{k}$$

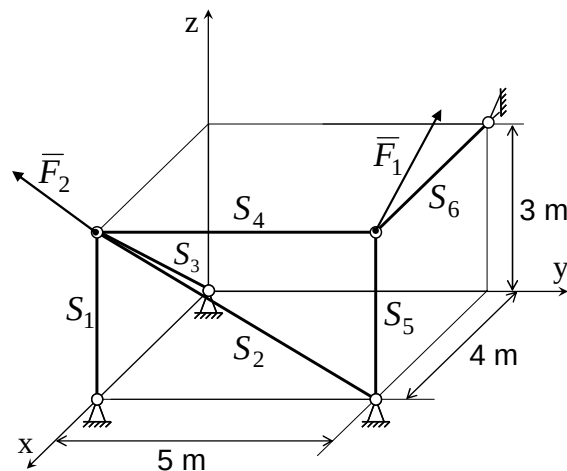
$$\bar{F}_C = 400\bar{i} + 0\bar{j} + 1200\bar{k}$$

19. feladat

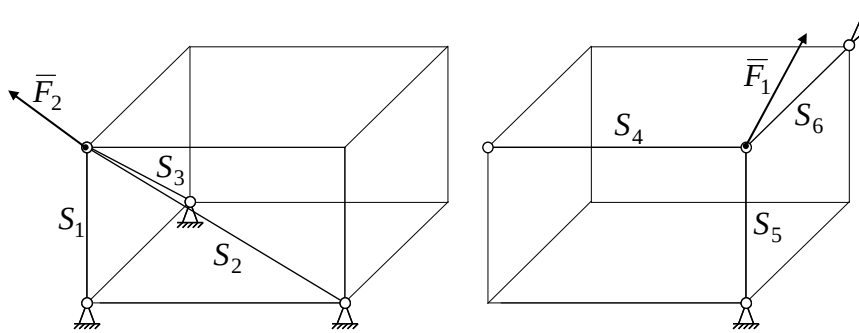
Határozzuk meg a vázolt hat rúdból álló szerkezet rúderőit!

$$\bar{F}_1 = 100\bar{i} + 200\bar{j} + 400\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = 200\bar{i} - 200\bar{j} + 200\bar{k}$$



Válasszuk szét gondoltban a két 3 rudas bakállványt. Az s_1 , s_2 , s_3 rudakból álló szerkezet a közös csuklópontban bármilyen irányú erőt kaphat, hiszen statikailag határozott megtámasztásokkal rendelkezik.

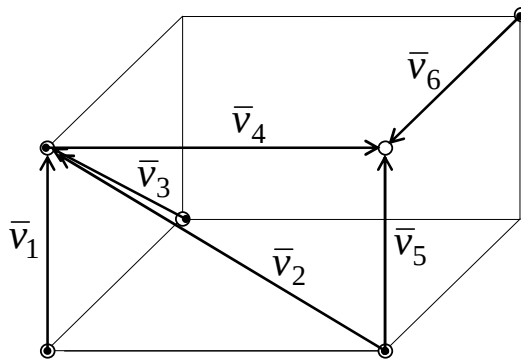


Az S_4 , S_5 , S_6 rudakból álló szerkezet a közös pontban ható általános irányú erő hatására labilis, hiszen az S_4 rúd vége nincs megtámasztva. Egyen-

súlyi állapot úgy következhet be, hogy az S_4 rúd végét hozzákötjük az első bakállványhoz. Ez azt jelenti, hogy az S_4 rúdban ébredő erő terheli az első bakállványt is.

A számítást tehát az S_4 , S_5 , S_6 rudakból álló bakállványnál kell kezdenünk. Az S_4 rúdban ébredő erő plusz terhelést jelent az S_1 , S_2 , S_3 bakállványnak.

A feladat megoldásához határozzuk meg elsőként a rudak vektorait.



$$\bar{v}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{v}_2 = 0\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{v}_3 = 4\bar{i} + 0\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{v}_4 = 0\bar{i} + 5\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{v}_5 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{v}_6 = 4\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

Bontsuk fel az $\bar{F}_1$ erőt S_4 , S_5 , S_6 irányú összetevőkre.

$$\bar{F}_1 = \lambda_4 \bar{v}_4 + \lambda_5 \bar{v}_5 + \lambda_6 \bar{v}_6.$$

Az egyes λ értékeket az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\lambda_4 = \frac{\bar{F}_1 \bar{v}_5 \bar{v}_6}{\bar{v}_4 \bar{v}_5 \bar{v}_6} \quad \lambda_5 = \frac{\bar{v}_4 \bar{F}_1 \bar{v}_6}{\bar{v}_4 \bar{v}_5 \bar{v}_6} \quad \lambda_6 = \frac{\bar{v}_4 \bar{v}_5 \bar{F}_1}{\bar{v}_4 \bar{v}_5 \bar{v}_6}$$

$$\bar{v}_4 \bar{v}_5 \bar{v}_6 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5(0 - 12) = 60$$

$$\bar{F}_1 \bar{v}_5 \bar{v}_6 = \begin{vmatrix} 100 & 200 & 400 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3(0 - 800) = 2400$$

$$\bar{v}_4 \bar{F}_1 \bar{v}_6 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 100 & 200 & 400 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5(0 - 1600) = 8000$$

$$\bar{v}_4 \bar{v}_5 \bar{F}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 100 & 200 & 400 \end{vmatrix} = -5(0 - 300) = 1500$$

$$\lambda_4 = \frac{2400}{60} = 40$$

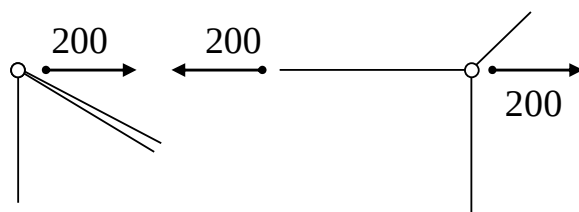
$$\lambda_5 = \frac{8000}{60} = \frac{800}{6}$$

$$\lambda_6 = \frac{1500}{60} = \frac{150}{6}$$

$$\bar{s}_4 = \lambda_4 \bar{v}_4 = 0\bar{i} + 200\bar{j} + 0\bar{k} \text{ húzott}$$

$$\bar{s}_5 = \lambda_5 \bar{v}_5 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 400\bar{k} \text{ húzott}$$

$$\bar{s}_6 = \lambda_6 \bar{v}_6 = 100\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} \text{ húzott}$$



Az S_4 rúd egyensúlyát megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy az S_1 , S_2 , S_3 bakállvány az S_4 rúdból egy $200\bar{j}$ vektorú plusz terhelést kap.

Ezzel az S_1 , S_2 , S_3 rudakból álló bakállvány terhelése

$$\bar{F}_2^* = \bar{F}_2 + 200\bar{j} = 200\bar{i} + 0\bar{j} + 200\bar{k} \text{ értékű lesz.}$$

Az S_1 , S_2 , S_3 bakállványnál írjuk fel az egyensúlyi egyenletet, vagyis

$$\bar{F}_2^* + \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = \bar{0}.$$

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{F}_2^* \bar{v}_2 \bar{v}_3}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\bar{v}_1 \bar{F}_2^* \bar{v}_3}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}$$

$$\lambda_3 = -\frac{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{F}_2^*}{\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3}$$

$$\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3(0 + 20) = 60$$

$$\bar{F}_2^* \bar{v}_2 \bar{v}_3 = \begin{vmatrix} 200 & 0 & 200 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -5(600 - 800) = 1000$$

$$\bar{v}_1 \bar{F}_2^* \bar{v}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 200 & 0 & 200 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{F}_2^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 200 & 0 & 200 \end{vmatrix} = 3(0 + 1000) = 3000$$

$$\lambda_1 = -\frac{1000}{60} = -\frac{100}{6}$$

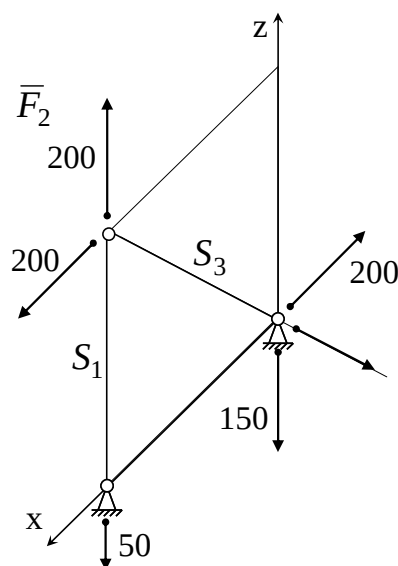
$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_3 = -\frac{3000}{60} = -50$$

$$\bar{s}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} - 50\bar{k} \text{ húzott}$$

$$\bar{s}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} \text{ vakrúd}$$

$$\bar{s}_3 = \lambda_3 \bar{v}_3 = -200\bar{i} + 0\bar{j} - 150\bar{k} \text{ húzott}$$



20. feladat

Határozza meg a kényszererőket!

$$\bar{F} = 100\bar{i} + 200\bar{j} + 300\bar{k}$$

eredmények:

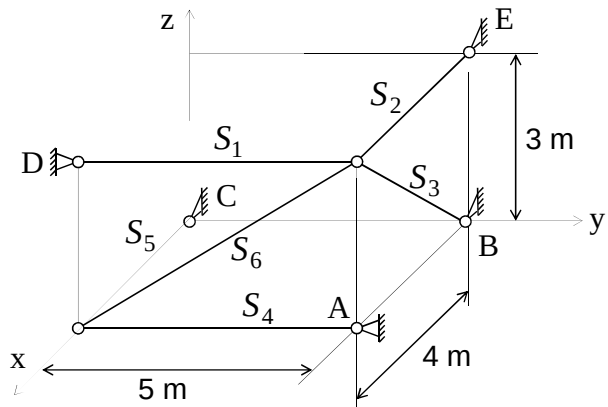
$$\bar{A} = 0\bar{i} + 300\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{B} = -400\bar{i} + 0\bar{j} - 300\bar{k}$$

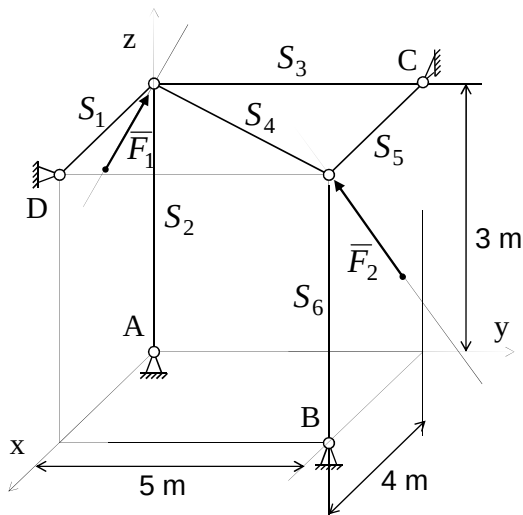
$$\bar{C} = -100\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{D} = 0\bar{i} - 500\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{A} = 400\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$



21. feladat



Határozza meg a kényszererőket!

$$\bar{F}_1 = 100\bar{i} + 100\bar{j} + 200\bar{k}$$

$$\bar{F}_2 = 200\bar{i} - 200\bar{j} + 300\bar{k}$$

eredmények:

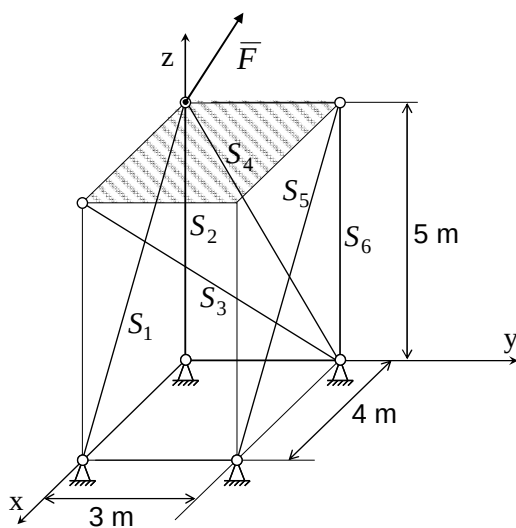
$$\bar{A} = 0\bar{i} + 0\bar{j} - 200\bar{k}$$

$$\bar{B} = 0\bar{i} + 0\bar{j} - 300\bar{k}$$

$$\bar{C} = -360\bar{i} + 100\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{D} = 60\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

22. példa



Egy súlytalan, végtelen merev lapot a térben megtámasztunk hat rúddal úgy, hogy a merev test bármilyen terhelése mellett a szerkezet stabil marad.

Határozzuk meg a rúderőket!

$$\bar{F} = 100\bar{i} + 100\bar{j} + 100\bar{k}$$

A térbeli erőrendszer egyensúlyi feltételeit három különböző módon fogalmaztuk meg.

I. $\sum \vec{F} = \vec{0}$ és $\sum \vec{M} = \vec{0}$

II. $\sum \vec{M}_A = \vec{0}$, $\sum \vec{M}_B = \vec{0}$ és $\sum \vec{M}_C = \vec{0}$.

III. Egymástól lineárisan független hat tengelyre felírt nyomaték zérus.

Nézzük meg, hogy az egyes egyensúlyi feltételek alkalmazásával hogyan oldható meg a feladat.

I. Vizsgáljuk a merev testre ható erőket. A rudakban - mivel azok csak csuklóikon terheltek - rúdírányú erők keletkeznek. Ezeket az erőket a rúdírányú vektoroknak λ -szorozásaként írhatjuk fel.

$$\vec{S}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 = \lambda_1 (-4\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k})$$

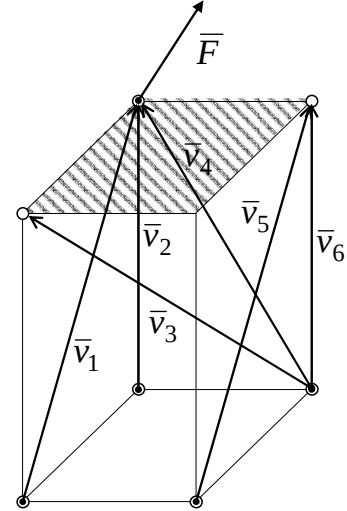
$$\vec{S}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 = \lambda_2 (0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{S}_3 = \lambda_3 \vec{v}_3 = \lambda_3 (4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{S}_4 = \lambda_4 \vec{v}_4 = \lambda_4 (0\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{S}_5 = \lambda_5 \vec{v}_5 = \lambda_5 (-4\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$\vec{S}_6 = \lambda_6 \vec{v}_6 = \lambda_6 (0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k})$$



A $\sum \vec{F} = \vec{0}$ vagyis, $\vec{F} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 = \vec{0}$ vektoregyenlet $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ egységvektorokhoz tartozó együtthatói külön-külön zérus értékűek.

$$(1) -4\lambda_1 + 0\lambda_2 + 4\lambda_3 + 0\lambda_4 - 4\lambda_5 + 0\lambda_6 + 100 = 0$$

$$(2) 0\lambda_1 + 0\lambda_2 - 3\lambda_3 - 3\lambda_4 + 0\lambda_5 + 0\lambda_6 + 100 = 0$$

$$(3) 5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_3 + 5\lambda_4 + 5\lambda_5 + 5\lambda_6 + 100 = 0$$

A $\sum \vec{M} = \vec{0}$ egyensúlyi egyenlet szerint a tér bármely pontjára felírt nyomaték zérus.

Válasszuk ki az $\vec{F}$ erő támadáspontját annak a pontnak, amelyre felírjuk az erők nyomatékát. Vegyük figyelembe, hogy erre a pontra az $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_4$ és $\vec{F}$ erőknek zérus a nyomatéka, hiszen hatásvonaluk átmegy a kiválasztott ponton.

Ennek megfelelően

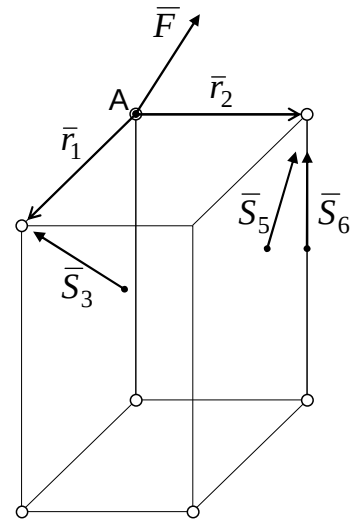
$$\sum \vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{S}_3 + \vec{r}_2 \times (\vec{S}_5 + \vec{S}_6) = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{S}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 4\lambda_3 & -3\lambda_3 & 5\lambda_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(20\lambda_3 - 0) + \vec{k}(-12\lambda_3 - 0) =$$

$$= 0\vec{i} - 20\lambda_3\vec{j} - 12\lambda_3\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 \times (\vec{S}_5 + \vec{S}_6) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -4\lambda_5 & 0 & (5\lambda_5 + 5\lambda_6) \end{vmatrix} = \vec{i}(15\lambda_5 + 15\lambda_6 - 0) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(0 + 12\lambda_5)$$



$$\sum \bar{M} = (15\lambda_5 + 15\lambda_6)\bar{i} - 20\lambda_3\bar{j} + (12\lambda_5 - 12\lambda_3)\bar{k} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

A skaláregyenletek:

$$(4) 15\lambda_5 + 15\lambda_6 = 0$$

$$(5) -20\lambda_3 = 0$$

$$(6) 12\lambda_5 - 12\lambda_3 = 0$$

$$\text{Az (5) egyenletből } \lambda_3 = 0$$

$$\text{A (6) egyenletből } \lambda_5 = 0$$

$$\text{A (4) egyenletből } \lambda_6 = 0$$

$$\text{A (2) egyenletből } \lambda_4 = \frac{100}{3}$$

Az (1) és (3) egyenletek az eddig kiszámított λ értékek behelyettesítésével az alábbi alakokat veszik fel:

$$(1) -4\lambda_1 + 100 = 0, \text{ amiből } \lambda_1 = \frac{100}{4} = 25$$

$$(3) 5\frac{100}{4} + 5\lambda_2 + 5\frac{100}{3} + 100 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{940}{12}$$

A rúderök rendre

$$\bar{S}_1 = -100\bar{i} + 0\bar{j} + 125\bar{k}$$

$$\bar{S}_2 = 0\bar{i} + 0\bar{j} - \frac{5 \cdot 940}{12}\bar{k}$$

$$\bar{S}_3 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

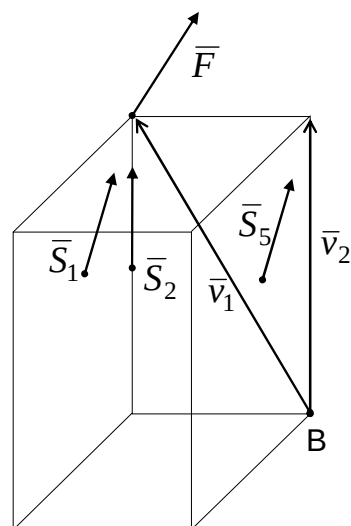
$$\bar{S}_4 = 0\bar{i} - 100\bar{j} + \frac{500}{3}\bar{k}$$

$$\bar{S}_5 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

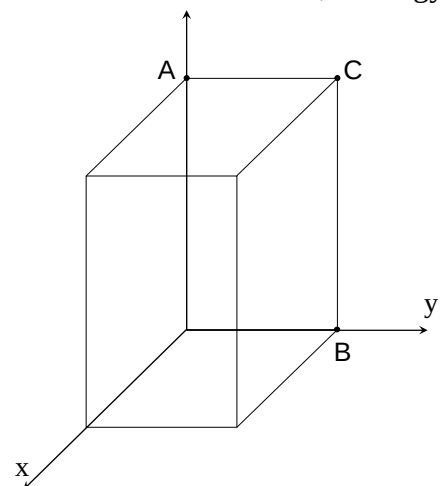
$$\bar{S}_6 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

Ellenőrzésképpen adjuk össze a lemezre ható erőket

$$\sum \bar{F} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$



II. Válasszunk ki három, nem egy egyenesre eső pontot.



Az A pontra számított nyomatékot az előző pontban számoltuk. A B pontra $\bar{S}_3$, $\bar{S}_4$, $\bar{S}_6$ erőknek zérus a nyomatéka, mivel átmennek a ponton. A C pontra nincs nyomatéka az $\bar{S}_5$ és $\bar{S}_6$ erőknek.

A következőkben kiszámítjuk az $\bar{M}_B$ és $\bar{M}_C$ nyomatékokat.

$$\bar{M}_B = \bar{v}_2 \times \bar{S}_5 + \bar{v}_1 \times (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{F}) = \bar{0}$$

$$\bar{v}_2 \times \bar{S}_5 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ -4\lambda_5 & 0 & 5\lambda_5 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(0-0) - \bar{j}(0+20\lambda_5) + \bar{k}(0-0) = 0\bar{i} - 20\lambda_5\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{v}_1 \times (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -3 & 5 \\ (-4\lambda_1 + 100) & 100 & 5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 100 \end{vmatrix} =$$

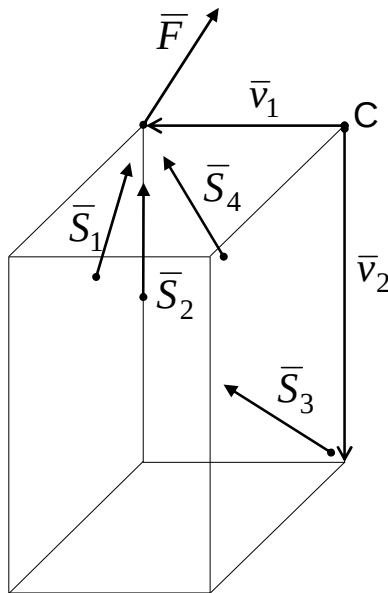
$$= \bar{i}(-15\lambda_1 - 15\lambda_2 - 300 - 500) - \bar{j}(0 + 20\lambda_1 - 500) + \bar{k}(0 - 12\lambda_1 + 300)$$

A skaláregyenletek:

$$-15\lambda_1 - 15\lambda_2 - 800 = 0$$

$$-20\lambda_5 - 20\lambda_1 + 500 = 0$$

$$-12\lambda_1 + 300 = 0$$



$$\sum \bar{M}_C = \bar{v}_2 \times \bar{S}_3 + \bar{v}_1 \times (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_4 + \bar{F}) = \bar{0}$$

$$\bar{v}_2 \times \bar{S}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -5 \\ 4\lambda_3 & -3\lambda_3 & 5\lambda_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(0 - 15\lambda_3) - \bar{j}(0 + 20\lambda_3) + \bar{k}(0 - 0) =$$

$$= -15\lambda_3\bar{i} - 20\lambda_3\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{v}_1 \times (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_4 + \bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -3 & 0 \\ (-4\lambda_1 + 100) & (-3\lambda_4 + 100) & (5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_4 + 100) \end{vmatrix} =$$

$$= -3[(5\lambda_1 + 5\lambda_2 + 5\lambda_4 + 100)\bar{i} - (-4\lambda_1 + 100)\bar{k}] =$$

$$= (-15\lambda_1 - 15\lambda_2 - 15\lambda_4 - 300)\bar{i} + (-12\lambda_1 + 300)\bar{k}$$

Az A ponthoz tartozó 3 skaláregyenlet:

$$(1) 15\lambda_5 + 15\lambda_6 = 0$$

$$(2) -20\lambda_3 = 0$$

$$(3) 12\lambda_5 - 12\lambda_3 = 0$$

A B ponthoz tartozó 3 skaláregyenlet:

$$(4) -15\lambda_1 - 15\lambda_2 - 800 = 0$$

$$(5) -20\lambda_5 - 20\lambda_1 + 500 = 0$$

$$(6) -12\lambda_1 + 300 = 0$$

A C ponthoz tartozó 3 skaláregyenlet:

$$(7) -15\lambda_1 - 15\lambda_2 - 15\lambda_4 - 300 = 0$$

$$(8) 0 = 0$$

$$(9) -12\lambda_1 + 300 = 0$$

$$\text{A (2)-ből} \quad \lambda_3 = 0$$

$$\text{A (3)-ből} \quad \lambda_5 = 0$$

$$\text{Az (1)-ből} \quad \lambda_6 = 0$$

$$\text{A (6), (9) vagy (5) egyenletből} \quad \lambda_1 = \frac{300}{12} = 25$$

$$\text{A (4)-ből} \quad \lambda_2 = \frac{-1175}{15}$$

$$\text{A (7)-ből} \quad \lambda_4 = \frac{500}{15}$$

A rúderők rendre

$$\bar{S}_1 = -100\bar{i} + 0\bar{j} + 125\bar{k}$$

$$\bar{S}_2 = 0\bar{i} + 0\bar{j} - \frac{5 \cdot 1175}{15}\bar{k}$$

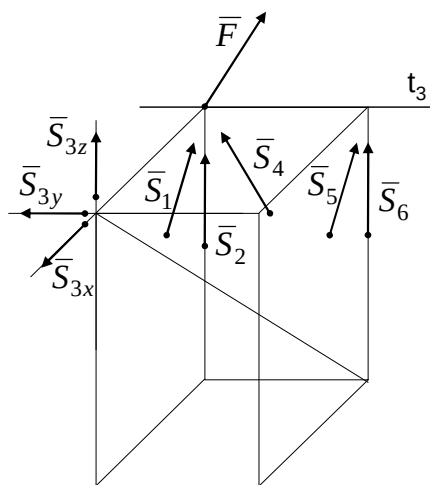
$$\bar{S}_3 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{S}_4 = 0\bar{i} - \frac{1500}{15}\bar{j} + \frac{2500}{15}\bar{k}$$

$$\bar{S}_5 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{S}_6 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

III. Keressünk hat lineárisan független tengelyt és számítsuk ki rájuk az erőrendszer nyomatékát.



A tengelyek megválasztásánál két fontos szempontot tartunk szem előtt:

- olyan tengelyt válasszunk, melyen sok erőnek a hatásvonalát átmegy, mert így ezeknek a nyomatéka zérus.
- a tengelyre könnyű legyen kiszámolni a nyomatékot

A kijelölt (t_3) tengelyre nincs nyomatéka az $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_4$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_6$, $\bar{F}$ erőknek, mert hatásvonaluk átmegy a tengelyen.

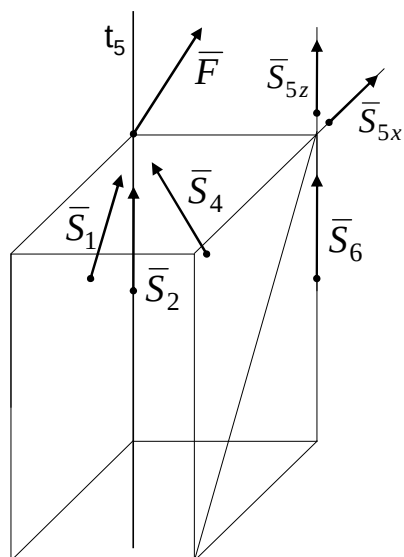
Bontsuk fel az $\bar{S}_3$ rúderőt komponenseire. Az $\bar{S}_{3x}$ hatásvonalát átmegy a tengelyen, az $\bar{S}_{3y}$ hatásvo-

nala párhuzamos a t_3 tengellyel, így ezek nyomatéka szintén zérus. Az $\bar{S}_{3z}$ -nek van nyomatéka a t_3 tengelyre, de az egyensúly miatt ennek is zérusnak kell lennie:

$$S_{3z} \cdot 4 = 0$$

ami csak úgy teljesülhet, ha $S_{3z} = 0$.

Ha az erőnek ez a komponense zérus, akkor maga az erő is zérus, tehát az S_3 rúdban nem ébred erő.



A kijelölt tengelyre (t_5) nincs nyomatéka

az $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_4$, $\bar{F}$ erőknek, mert hatásvonaluk átmegy a tengelyen;

$\bar{S}_3$ -nak, mert értéke zérus;

$\bar{S}_6$ -nak, mert hatásvonala párhuzamos a tengellyel;

$\bar{S}_{5z}$ -nek, mert hatásvonala úgyszintén párhuzamos a tengellyel.

$\bar{S}_{5x}$ nyomatéka a tengelyre $S_{5x} \cdot 3$. Ennek a nyomatéka az egyensúly miatt zérus értékű, ezért $S_{5x} = 0$

Mivel az erő egyik komponense zérus, így maga az erő is zérus értékű:

$$\bar{S}_5 = \bar{0}$$

Vagyis az S_5 rúdban nem ébred erő.

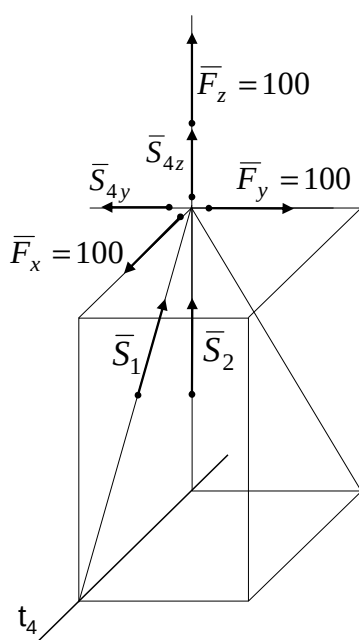
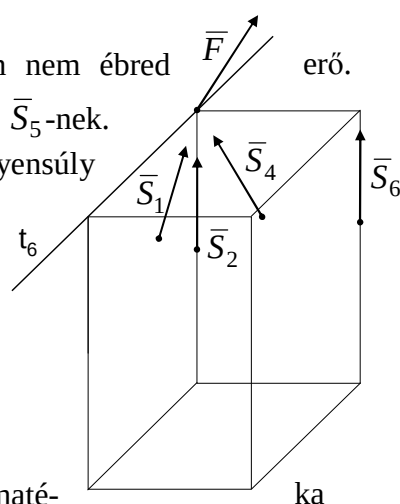
A t_6 tengelyre nincs nyomatéka az $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_4$, $\bar{F}$, $\bar{S}_3$, $\bar{S}_5$ -nek.

Az S_6 erőnek van nyomatéka a kijelölt tengelyre. Az egyensúly miatt azonban ennek zérus értékűnek kell lenni

$$S_6 \cdot 3 = 0$$

$$S_6 = 0$$

Az S_6 rúdban tehát nem ébred erő.



A t_4 tengelyre nincs nyomaté-

$\bar{S}_3$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_6$ -nak, mert értéke zérus;

$\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ -nek, mert hatásvonala átmegy a tengelyen;

$\bar{F}_z$, $\bar{S}_{4z}$ -nek, mert hatásvonala átmegy a tengelyen;

$\bar{F}_x$ -nek, mert hatásvonala párhuzamos a tengellyel.

$$\text{Így } S_{4y} \cdot 5 - F_y \cdot 5 = 0$$

$$\text{vagyis } S_{4y} = F_y = 100$$

Az $\bar{S}_{4x}$ meghatározása a hasonló háromszögek alapján lehetséges.

A geometriai háromszög hasonló az erő-háromszöghöz, vagyis

$$\frac{S_{4z}}{S_{4y}} = \frac{5}{3} \quad S_{4z} = \frac{5}{3} S_{4y} = \frac{500}{3}$$

$$\text{Ezzel } \bar{S}_4 = -100\bar{j} + \frac{500}{3}\bar{k}$$

A t_1 tengelyre nincs nyomatéka

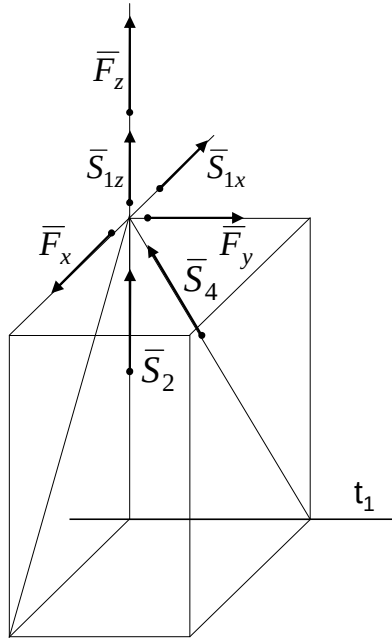
$\bar{S}_3$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_6$ -nak, mert értéke zérus;

$\bar{S}_2$, $\bar{S}_4$ -nek, mert hatásvonala átmegy a tengelyen;

$\bar{S}_{1z}$, $\bar{F}_z$ -nek, mert hatásvonala átmegy a tengelyen; $\bar{F}_y$ -nak, mert hatásvonala párhuzamos a tengellyel.

$$\text{Így, } F_x \cdot 5 - S_{1x} \cdot 5 = 0$$

$$S_{1x} = F_x = 100$$



$$\bar{S}_1 = -100\bar{i} + 125\bar{k}$$

A t_2 tengelyre nincs nyomatéka

$\bar{S}_3$, $\bar{S}_5$, $\bar{S}_6$ -nak, mert értéke zérus;

$\bar{S}_4$ -nek, mert hatásvonala átmegy a tengelyen;

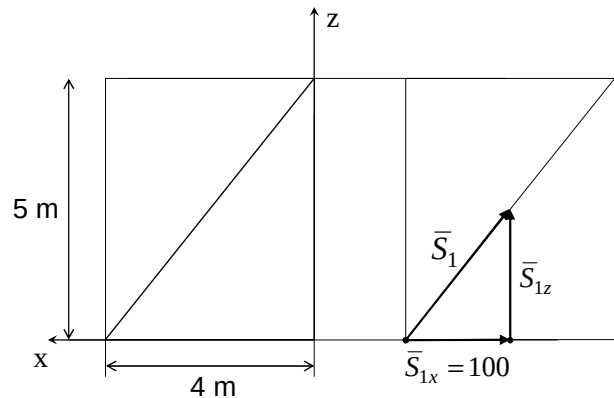
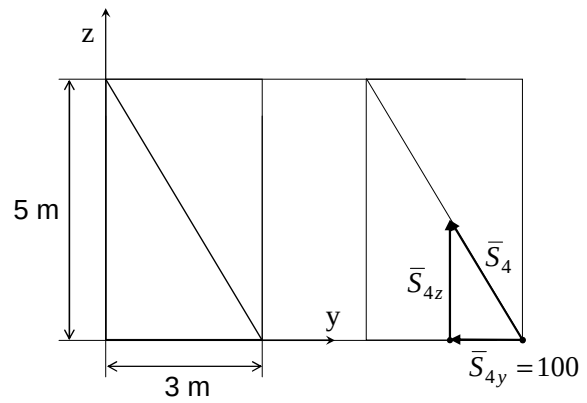
$\bar{F}_x$, $\bar{S}_{1x}$ -nek, mert hatásvonala párhuzamos a tengellyel.

$$\text{Így, } S_2 \cdot 3 + S_{1z} \cdot 3 + F_z \cdot 3 + F_y \cdot 5 = 0$$

$$S_2 \cdot 3 = -(S_{1z} \cdot 3 + F_z \cdot 3 + F_y \cdot 5)$$

$$S_2 \cdot 3 = -(125 \cdot 3 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 5) = -1175$$

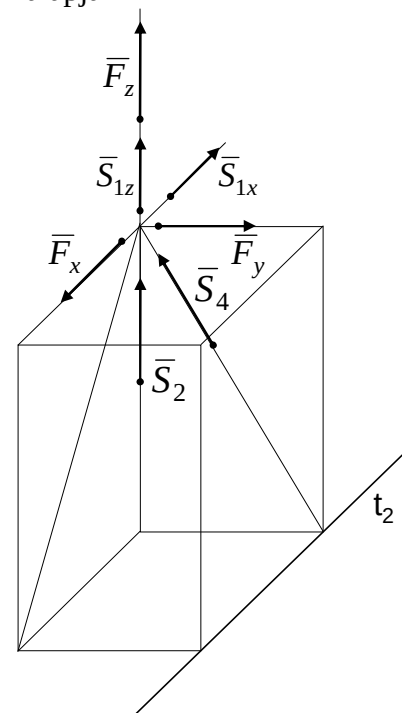
$$S_2 = -\frac{1175}{3}$$



A hasonló háromszögek alapján

$$\frac{S_{1z}}{S_{1x}} = \frac{5}{4}$$

$$S_{1z} = \frac{5}{4} S_{1x} = 125$$



A rúderők tehát rendre:

$$\bar{S}_1 = -100\bar{i} + 0\bar{j} + 125\bar{k}$$

$$\bar{S}_2 = 0\bar{i} + 0\bar{j} - \frac{1175}{3}\bar{k}$$

$$\bar{S}_3 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{S}_4 = 0\bar{i} - 100\bar{j} + \frac{500}{3}\bar{k}$$

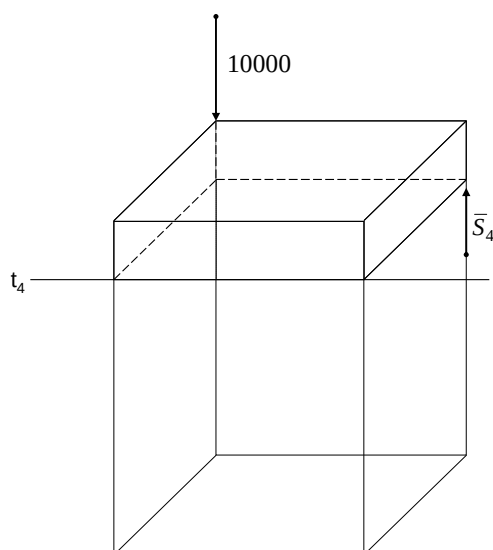
$$\bar{S}_5 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{S}_6 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

A feladat megoldása - történjen az bármelyik módszer szerint - ugyanarra az eredményre vezet.

23. példa

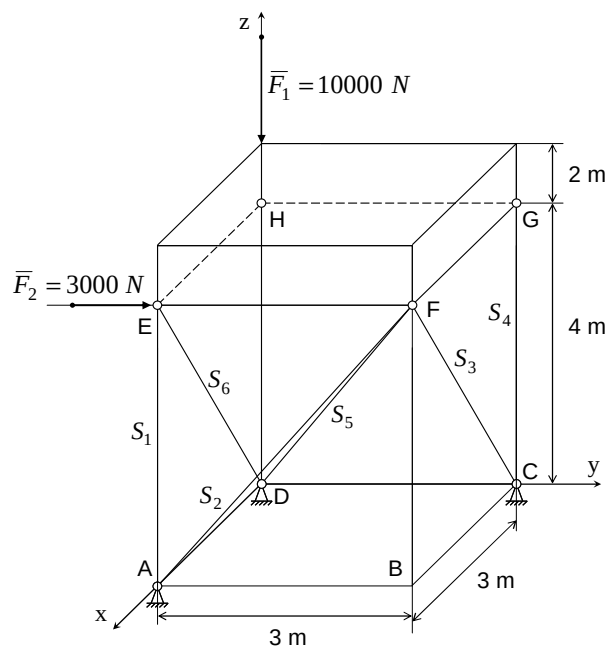
Egy 2 m vastagságú végtelen merev testet hat rúddal megtámasztunk. Határozzuk meg a rúderőket és a D pontban ébredő kényszererőt!



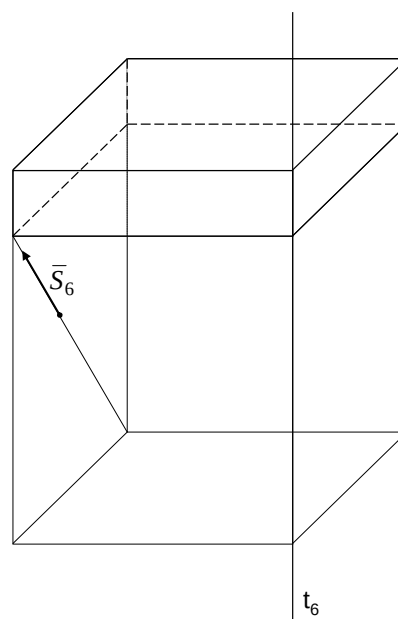
$$10000 \cdot 3 - S_4 \cdot 3 = 0$$

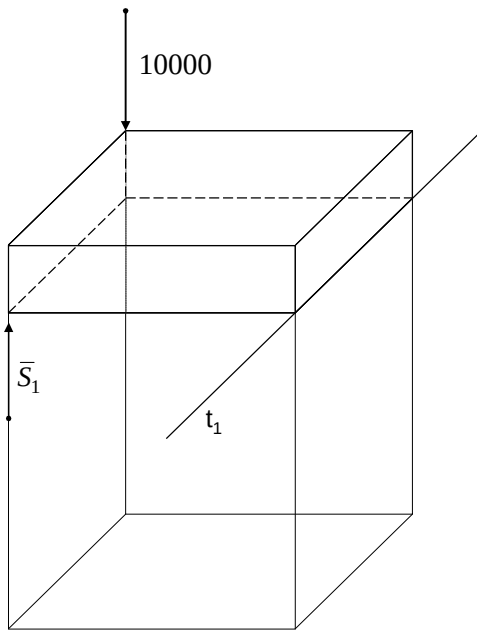
$$S_4 = 10000$$

$$\bar{S}_4 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 10000\bar{k}$$



$$\bar{S}_6 = \bar{0}$$



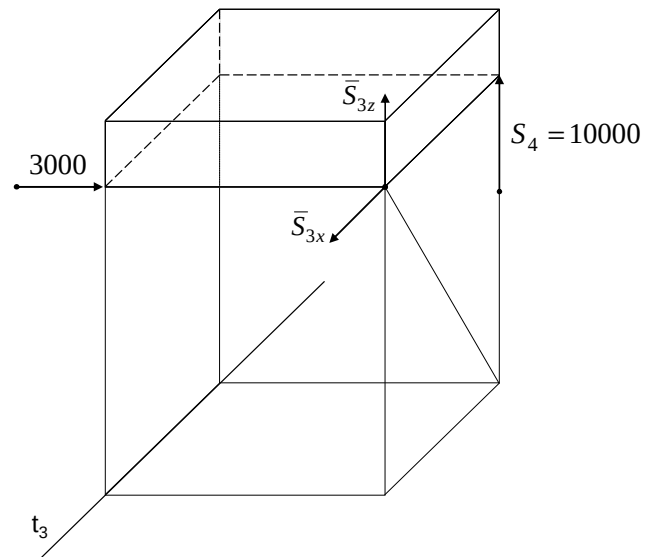


$$S_1 = 10000$$

$$\bar{S}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 10000\bar{k}$$

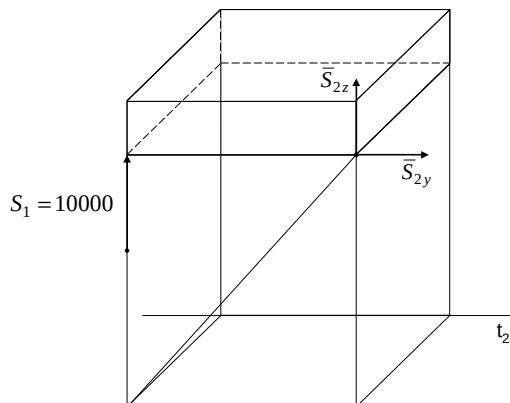
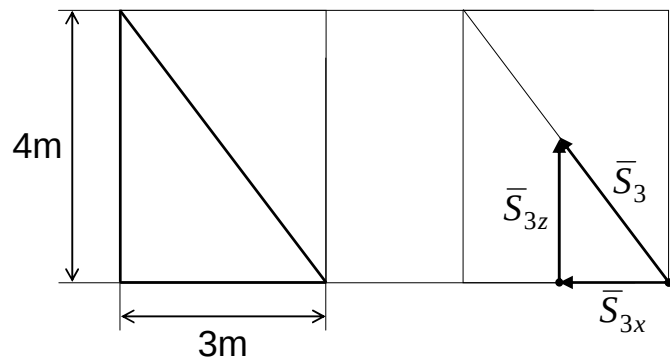
$$S_{3z} \cdot 3 - 3000 \cdot 4 + 10000 \cdot 3 = 0$$

$$S_{3z} = -6000$$



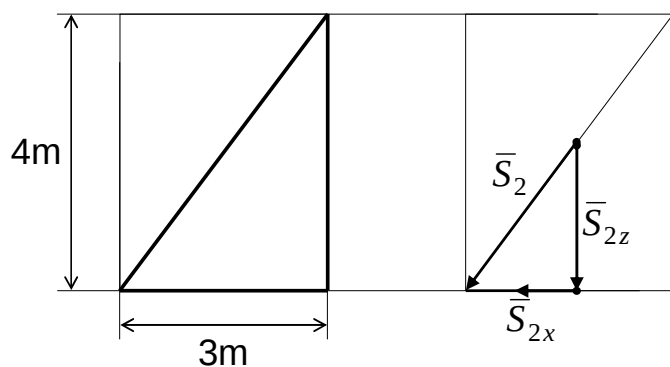
$$S_{3x} = -4500$$

$$\bar{S}_3 = -4500\bar{i} + 0\bar{j} - 6000\bar{k}$$



$$10000 \cdot 3 + S_{2z} \cdot 3 = 0$$

$$S_{2z} = -10000$$



$$S_{2y} = 7500$$

$$\bar{S}_2 = 0\bar{i} - 7500\bar{j} - 10000\bar{k}$$

$$4500 \cdot 3 - S_{5x} \cdot 3 = 0$$

$$S_{5x} = 4500$$

Ennek következtében adódik

$$S_{5y} = 4500$$

$$S_{5z} = 6000$$

$$\bar{S}_5 = 4500\bar{i} + 4500\bar{j} + 6000\bar{k}$$

A rúderők:

$$\bar{S}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 10000\bar{k}$$

$$\bar{S}_2 = 0\bar{i} - 7500\bar{j} - 10000\bar{k}$$

$$\bar{S}_3 = -4500\bar{i} + 0\bar{j} - 6000\bar{k}$$

$$\bar{S}_4 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 10000\bar{k}$$

$$\bar{S}_5 = 4500\bar{i} + 4500\bar{j} + 6000\bar{k}$$

$$\bar{S}_6 = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

A merev testre a rúderőkön kívül még hat az $\bar{F}_1$ és $\bar{F}_2$ erő is.

$$\bar{F}_1 = 0\bar{i} + 0\bar{j} - 10000\bar{k}$$

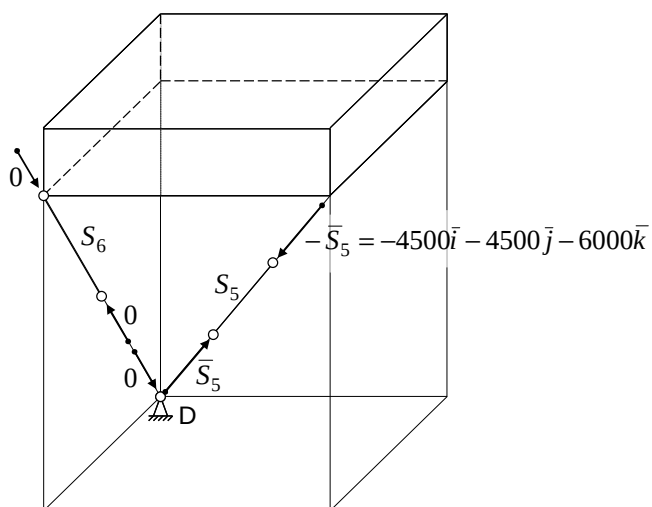
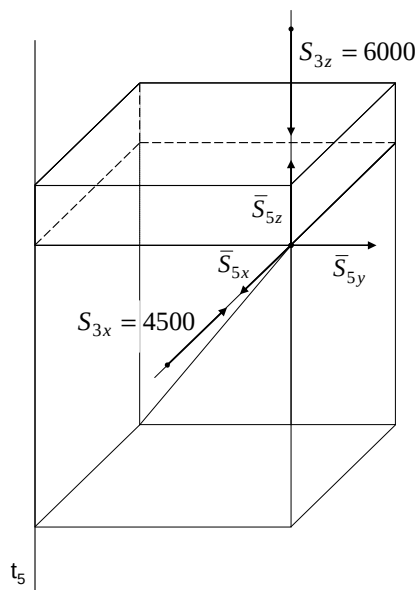
$$\bar{F}_2 = 0\bar{i} + 3000\bar{j} + 0\bar{k}$$

A merev testre ható összes erő eredője zérus.

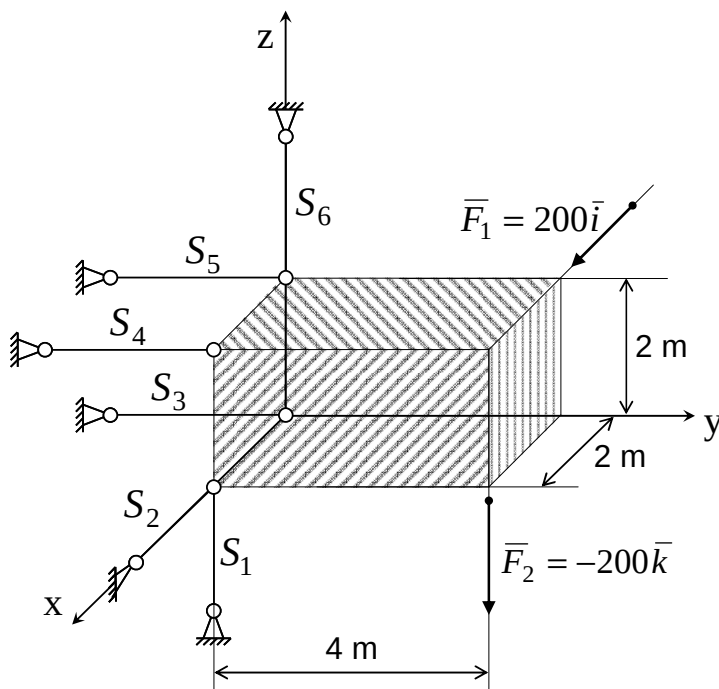
$$\sum \bar{F} = 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$\bar{D}$ kényszererő

$$\bar{D} = \bar{S}_5 = 4500\bar{i} + 4500\bar{j} + 6000\bar{k}$$



24. feladat



Egy végtelen merev testet 6 rúddal támasztanak meg az ábrán látható módon. A testre $\vec{F}_1$ erő hat. Határozza meg a rúderőket!

$$\vec{S}_1 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 400\vec{k}$$

$$\vec{S}_2 = -200\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{S}_3 = 0\vec{i} + 400\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{S}_4 = 0\vec{i} + 400\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{S}_5 = 0\vec{i} - 800\vec{j} + 0\vec{k}$$

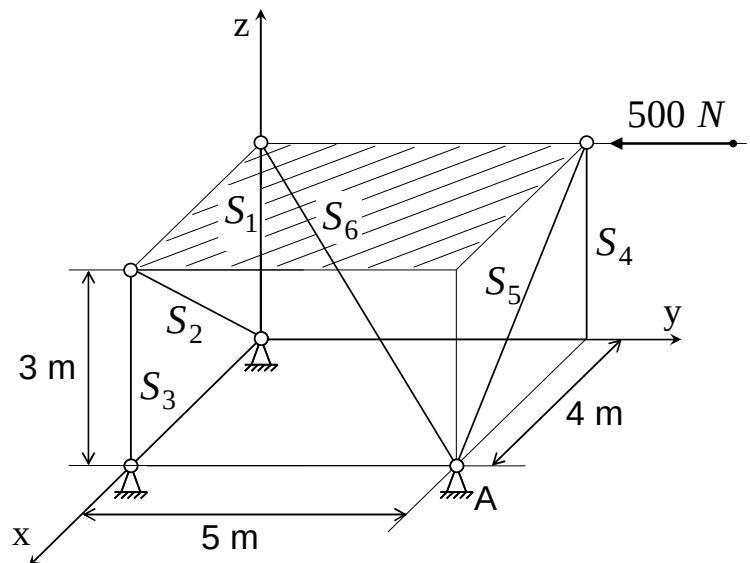
$$\vec{S}_6 = 0\vec{i} + 0\vec{j} - 200\vec{k}$$

25. feladat

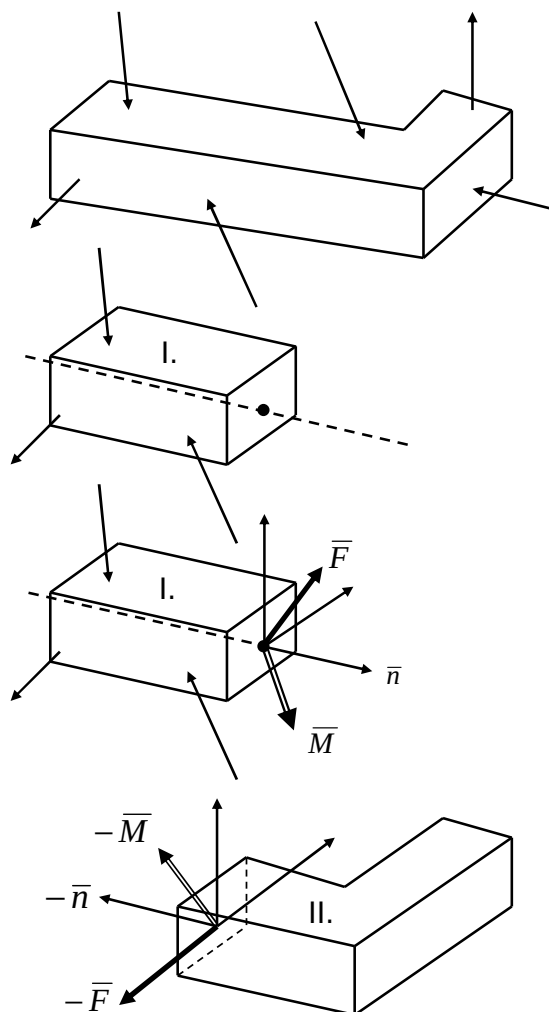
Egy zérus vastagságú végtelen merev lapot 6 rúddal támasztanak meg. Határozza meg az A pontban ébredő csuklóerőt!

Eredmény:

$$\vec{A} = 400\vec{i} + 500\vec{j} - 300\vec{k}$$



III.) Igénybevétel



Tételezzük fel, hogy az ábrán vázolt testet támadó erők (melyek lehetnek terhelések és kényszererők egyaránt) egyensúlyban vannak.

Válasszuk ketté a testet a súlyvonalának bármely pontján átmenő, az adott pontban a súlyvonalra merőleges síkkal. Ekkor az egyensúly megbomlik.

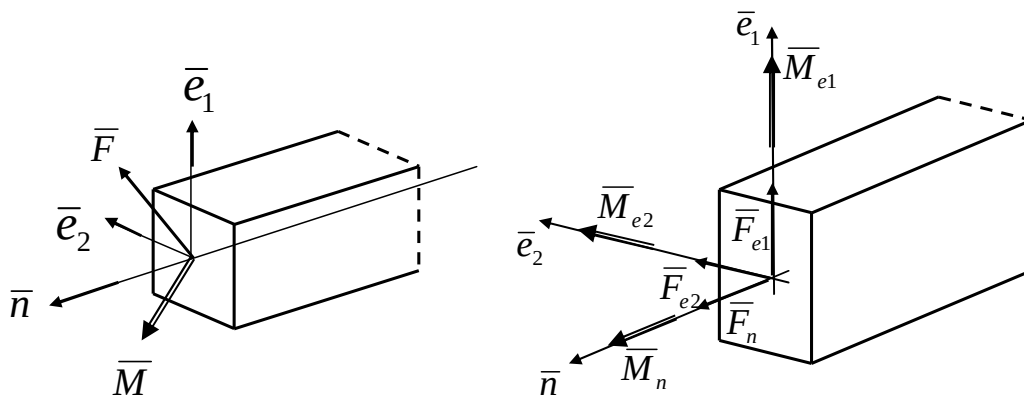
Az egyensúly helyreállításakor az elvágás helyén a keresztmetszet súlypontjában működtetni kell egy $\bar{F}$ erővektort és egy $\bar{M}$ nyomatékvektort.

Egy rúd tetszőleges keresztmetszetének igénybevételén a rajta átadódó erőhatást értjük. Ez egy felületen megoszló erőrendszer, melynek eloszlását a statika módszereivel nem tudjuk követni, de az eredőjét meghatározhatjuk.

A megállapodás alapján egy keresztmetszet igénybevételén az első (I.) testről a második (II.) testre átadódó erőhatást értjük. Ez pontosan megegyezik az első testre ható erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába redukált vektorkettőssével.

$$\begin{aligned} -\bar{M} &= \sum \bar{M}_i + \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i \\ -\bar{F} &= \sum \bar{F}_i \end{aligned}$$

Általános esetben ez a vektorkettős $(\bar{F}, \bar{M})$ felbontható hat komponensre.



$\bar{n}$ = a kiválasztott keresztmetszet normálisa.

A hat komponensből négy beleesik a keresztmetszet síkjába, kettő pedig merőleges rá. Ezek a komponensek az alábbi igénybevételeket jelentik:

$\bar{F}_n$ (N) normálerő

$\bar{F}_{e1}$ (V) nyíróerő

$\bar{F}_{e2}$ (V) nyíróerő

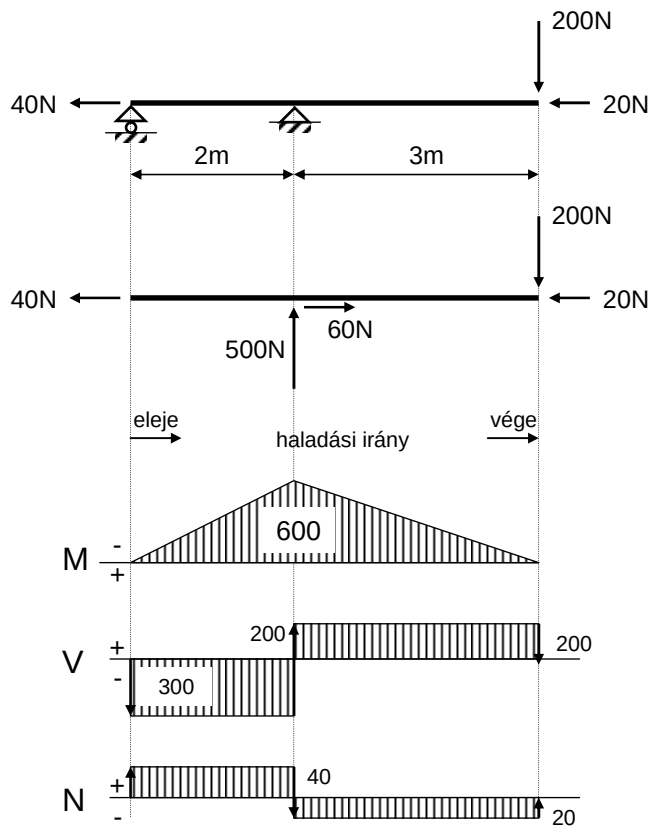
$\bar{M}_n$ (M_{cs}) csavaró nyomaték

$\bar{M}_{e1}$ (M_h) hajlító nyomaték

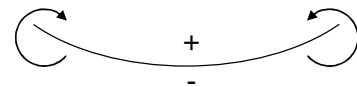
$\bar{M}_{e2}$ (M_h) hajlító nyomaték

Ha a keresztmetszetet egyidejűleg csak egyetlen erő- vagy nyomatékkomponens terheli, akkor egyszerű igénybevételről beszélünk. Ha több komponens lép fel, akkor összetett az igénybevétel.

Hogy szemléletes képet kapjunk az egyes keresztmetszetek igénybevételéről, a hely függvényében ábrázoljuk a keresztmetszetet terhelő normálerőt, nyíróerőt, hajlító és csavaró nyomatékat. Az igénybevételi ábrák megrajzolásánál mindig követni kell a következő – megállapodás alapján hozott – szabályokat.

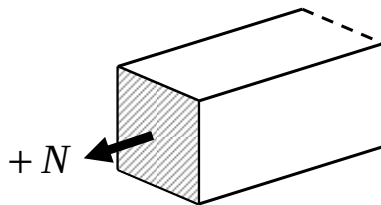


- Kijelöljük a haladási irányt.
- A nyomatéki metszéseket mindig a húzott oldalra rajzoljuk. Ez azt jelenti, hogy a balról számított nyomaték akkor pozitív (+), ha a nyomaték az óramutató járásával megegyezően forog. A jobbról számított nyomaték akkor pozitív, ha az óramutató járásával ellentétesen forog.

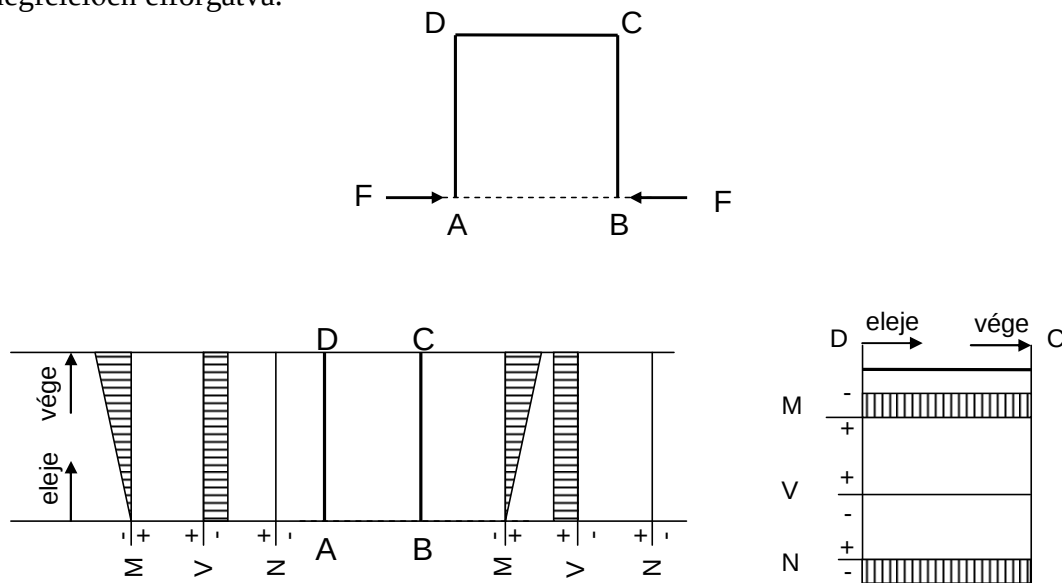


- A nyíróerő ábrán balról indulva a fölfelé mutató irány a pozitív. Máshogy fogalmazva, az az irány a pozitív, amely a pozitív nyomatékat hozza létre.
- A normálerő ábrán a húzás pozitív előjelű, míg a nyomás negatív. Pozitívnak tekintjük

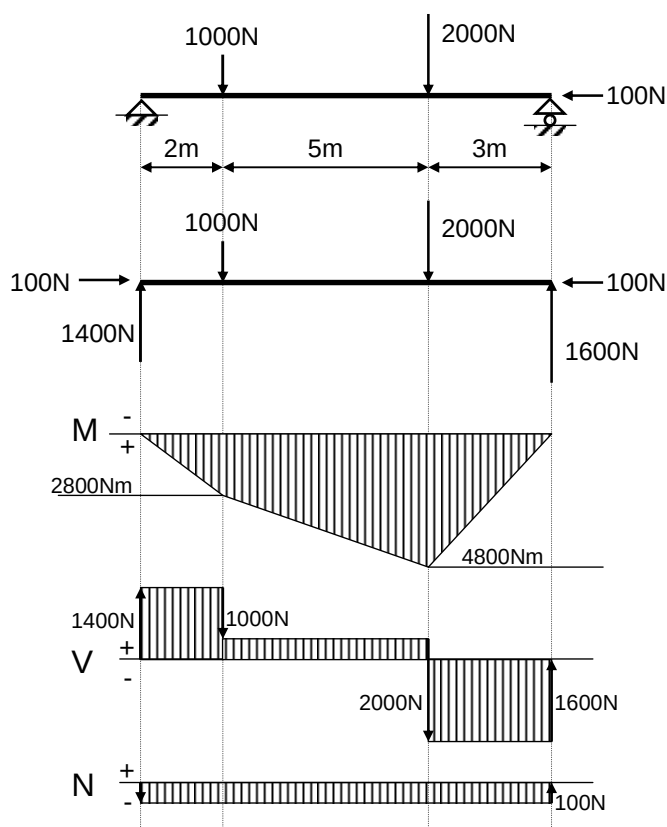
a normálerőt, ha balról számított eredő erő a vizsgált keresztmetszetből kifelé mutat.



Tört tengelyű tartóknál az egyenes tartónál alkalmazott előjelszabály a mérvadó, de megfelelően elforgatva.

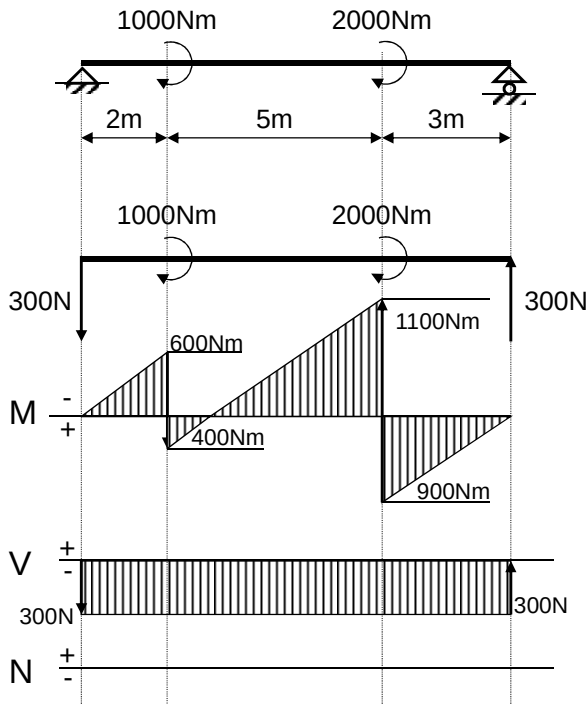


1.) Koncentrált erővel terhelt tartó



- Első lépésként meghatározzuk a kényszererőket, az egyensúlyi egyenletek alapján.
- Alkalmazzuk az előzőekben magadott előjelszabályt.
- Figyelembe vesszük a koncentrált erőkkel terhelt tartó nyomatéki ábrájának alábbi tulajdonságait:
 - Szabad végen (a rúd végein), ha nincs koncentrált nyomaték, akkor a hajlító nyomaték értéke zérus.
 - Két erő között a függvény lineáris. Ezért elég a függvény két végpontján lévő értékeket meghatározni.
 - Az erő hatásvonalánál a függvénynek törése van.

2.) Koncentrált nyomatékkal terhelte tartó



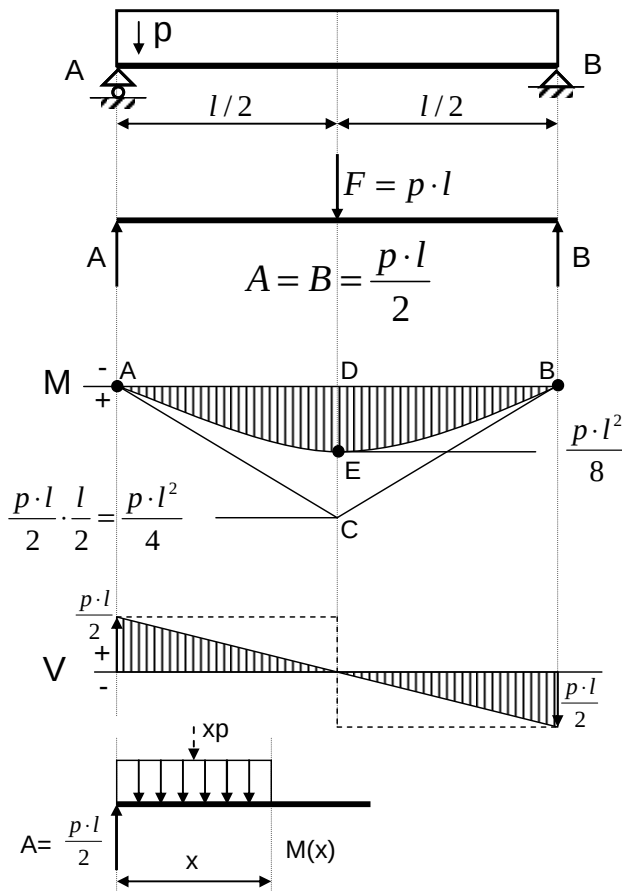
A koncentrált nyomatékkal terhelte tartónál, ahol a koncentrált nyomaték hat, ott a nyomatéki függvényben – az ott ható nyomaték értékének megfelelően – ugrás van.

A függvény pontjai rendre (az előjelszabály figyelembevételével):

$$\begin{aligned} & -300 \cdot 2 = -600 \\ & -300 \cdot 2 + 1000 = +400 \\ & -300 \cdot 7 + 1000 = -1100 \\ & -300 \cdot 7 + 1000 + 2000 = +900 \\ & -300 \cdot 10 + 1000 + 2000 = 0 \end{aligned}$$

Az egyes erőhatások közötti szakaszokon a függvény továbbra is lineáris.

3.) Megoszló erőrendszerrel terhelte tartó



- Megoszló erővel terhelte tartó esetén a megoszló erőrendszert helyettesíthetjük egy koncentrált erővel, amely a megoszló erőrendszer eredője.
- Meghatározzuk a kényszererőket.
- Megrajzoljuk a nyomatéki ábrát a koncentrált erőkre.
- Egyenletesen megoszló terhelés esetén, ahol a nyomatéki függvényt az alábbi képlet

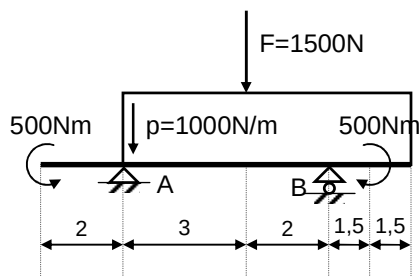
$$M(x) = \frac{p \cdot l}{2} \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

határozza meg, a következő módon rajzolhatjuk meg a másodfokú függvényt.

- Meghatározzuk azt a háromszöget, amelynek segítségével megrajzoljuk a parabolát. (ABC háromszög)
 - A parabola megrajzolásához három pontra és három érintőre van szükségünk. Ezek rendre a következők:
 - A pont AC egyenes, mint érintő
 - B pont BC egyenes, mint érintő
 - E pont és az E pontban, az AB egyenesekkel párhuzamos érintő.
- Az E pontot az alábbiak szerint kapjuk:
- A C ponton át párhuzamost húzunk a megoszló erőrendszer intenzitásával
 - Ez az egyenes az AB egyenest a D pontban metszi
 - A CD távolságot megfelezzük

A nyíróerő ábrát először megrajzoljuk a koncentrált erőkre. Azon a szakaszon, ahol a megoszló erőrendszer található a szakasz elején és végén kapott nyíróerő értékeket egyetlen egyenessel kötjük össze, hiszen ezen a szakaszon a nyíróerő függvényt az alábbi képlet írja le:

$$V(x) = \frac{p \cdot l}{2} - p \cdot x$$

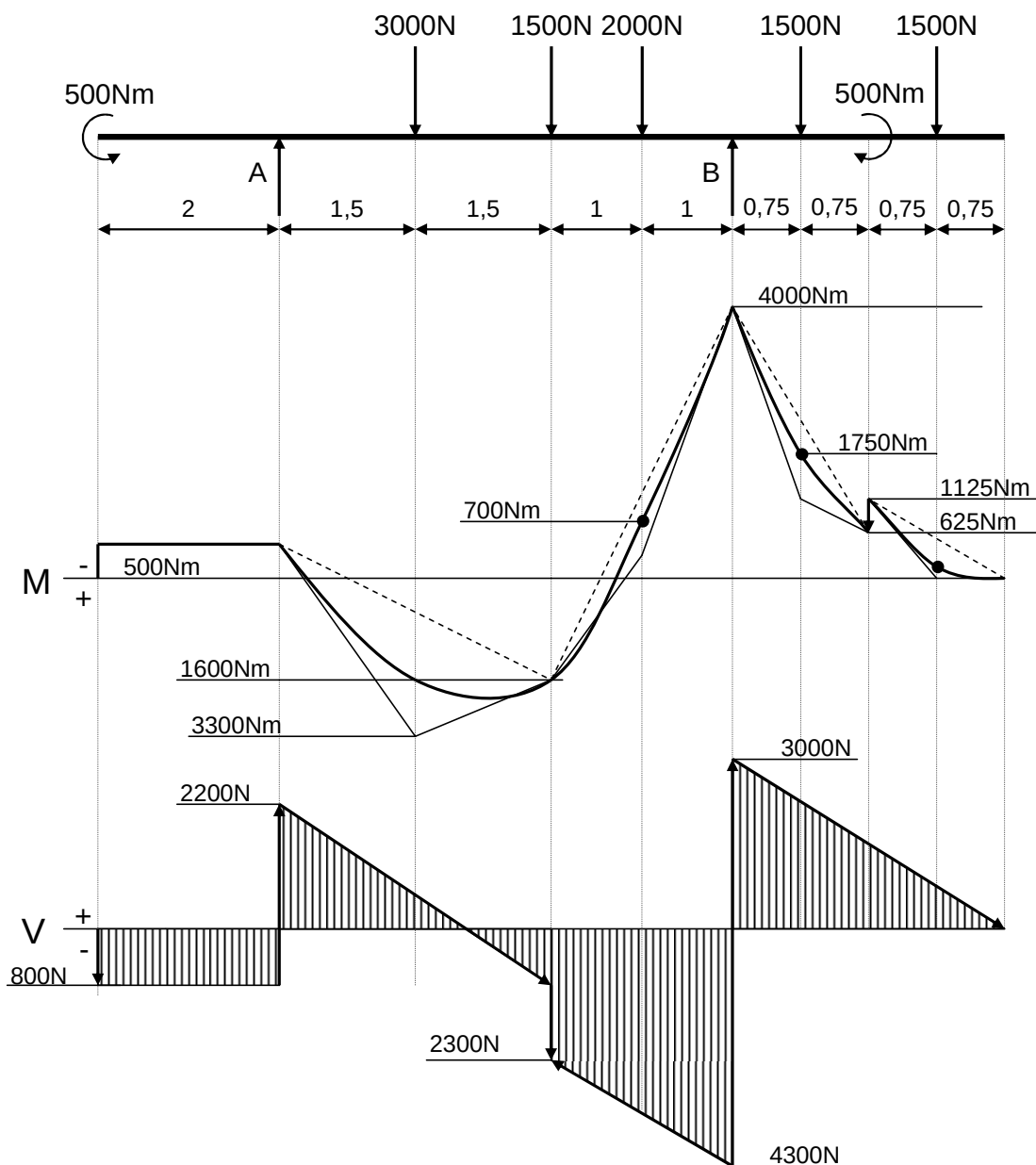


Az olyan esetekben, amikor a megoszló terhelés tartományában erők vagy nyomatékok vannak, az igénybevételi ábrák megrajzolásához a megoszló terhelés nem helyettesíthető egyetlen koncentrált erővel!

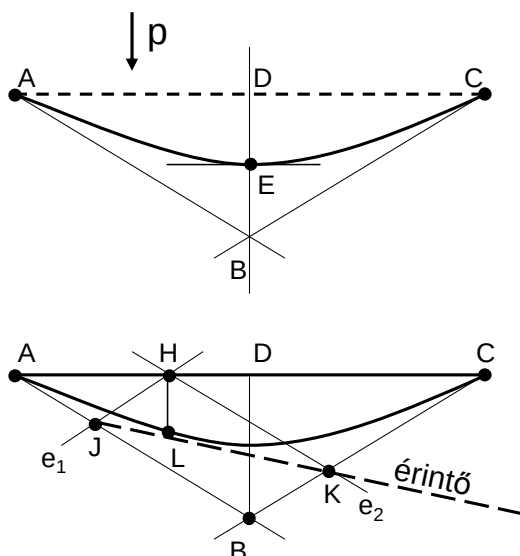
$$A = 2200 \text{ N}$$

$$B = 7300 \text{ N}$$

A megoszló erő tartományát úgy kell szakaszokra bontani, hogy az egyes szakaszokon belül a megoszló terhelés tisztán hasson. Ennek megfelelően az ábrán a megoszló terhelést 4 részre bontottuk.



4.) Másodfokú függvény rajzolása



Jelen esetben ismertnek tételezzük fel az A,B,C pontokat, valamint az egyes pontokat összekötő egyeneseket.

A megoszló erőrendszer intenzitása a rajznak megfelelő.

1. B ponton keresztül párhuzamost húzunk az intenzitás irányával,
2. BD távolság felezésével kapjuk meg az E pontot,
3. E pontban AC egyenessel párhuzamost húzunk.

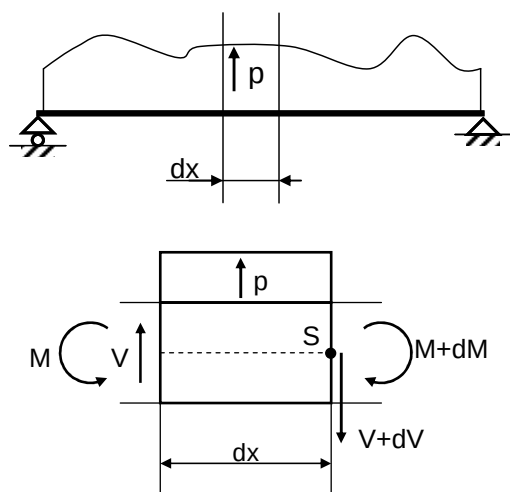
Ezzel megkapjuk a parabola 3 pontját és az érintőjét.

További pontok szerkesztése

1. AC szakaszon kijelölünk egy pontot H
2. H ponton keresztül párhuzamost húzunk a BC illetve AB egyenesekkel
3. kijelöljük a J és K pontokat. A JK egyenest megrajzoljuk
4. H ponton keresztül párhuzamost húzunk a DB szakasszal
5. Megkapjuk az L pontot

Az L pont valamint a JK egyenes adja a parabola újabb pontját, valamint a hozzá tartozó érintőt.

5.) Összefüggés a hajlítónyomatéki és nyíróerő függvények között



Vizsgáljuk meg a dx hosszúságú elemi tartódarab egyensúlyát.

Írjuk fel az S (keresztmetszet súlypontja) pontra a nyomatékokat

$$-M + Vdx + pdx \cdot \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

$$pdx \cdot \frac{dx}{2} \equiv 0 \text{ (kis számokról lévén szó)}$$

$$Vdx + dM = 0$$

$$dM = -Vdx$$

$$\text{illetve } \frac{dM}{dx} = -V$$

Ez az összefüggés azt fejezi ki, hogy a hajlítónyomatéki függvény x szerinti első differenciálhányadosa a nyíróerő függvény. Ebből az is következik, hogy ahol a nyíróerő függvény zérus értékű, ott a nyomatéki függvénynek helyi szélsőértéke van.

A függőleges erők egyensúlyát a

$$V + pdx - (V + dV) = 0$$

egyenlet írja le, amiből

$$pdx - dV = 0$$

$$\text{illetve } \frac{dV}{dx} = p$$

Vagyis a nyíróerő függvény differenciálhányadosa megegyezik a terhelő megoszló erőrendszer adott pontbeli intenzitásával. Ezekből az összefüggésekből az alábbi, a gyakorlatban használatos következtetések vonhatók le:

1. Mivel a levezetéseknel, a vizsgált szakaszokon megoszló terhelést vettünk figyelembe, ezért az eredmények érvényessége csak olyan szakaszokra vonatkozik, ahol nem lép fel koncentrált erő vagy nyomaték. Másképpen fogalmazva az összefüggések csak koncentrált erőhatások (erők, nyomatékok) közötti szakaszokon érvényesek.
2. A hajlítónyomatéki függvény x szerinti első differenciálhányadosa a nyíróerő függvény. Ebből két dolog következik:
 - Ahol a nyíróerő függvény zérus értékű, ott a nyomatéki függvénynek helyi szélsőértéke van.

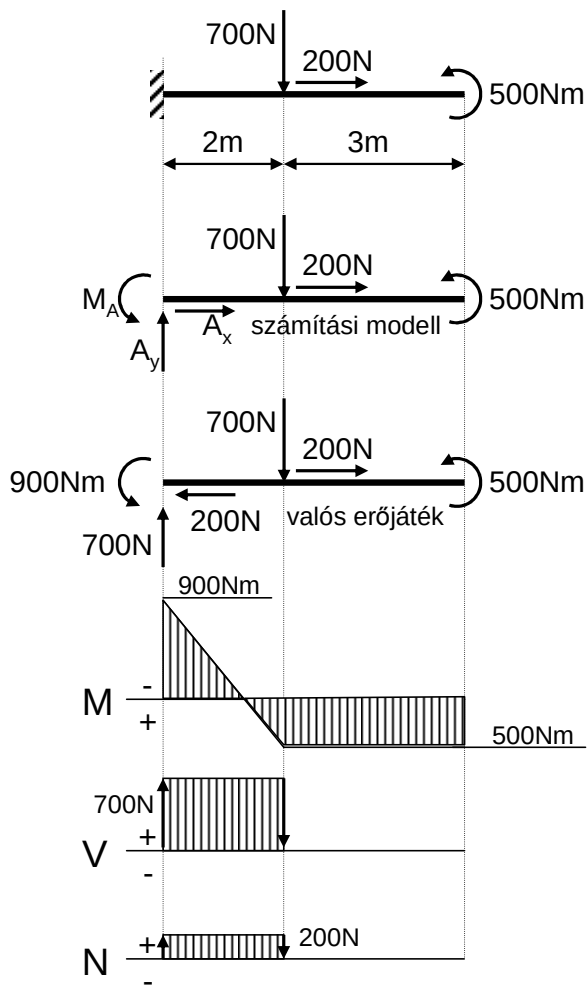
- A vizsgált szakaszon a nyomatéki függvény értékének változása az ugyanahhoz a szakaszhoz tartozó nyíróerő függvény alatti területtel egyezik meg.

$$\Delta M = \int V dx$$

- Azon a szakaszokon, ahol egyenletesen megoszló terhelés van,
 - A nyíróerő függvény lineáris
 - A nyomatéki függvény másodfokú függvény.

6.) Példák az igénybevételek témakörből

1. példa



Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráját!

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum X = 0 \quad A_x + 200 = 0$$

$$A_x = -200 \text{ N}$$

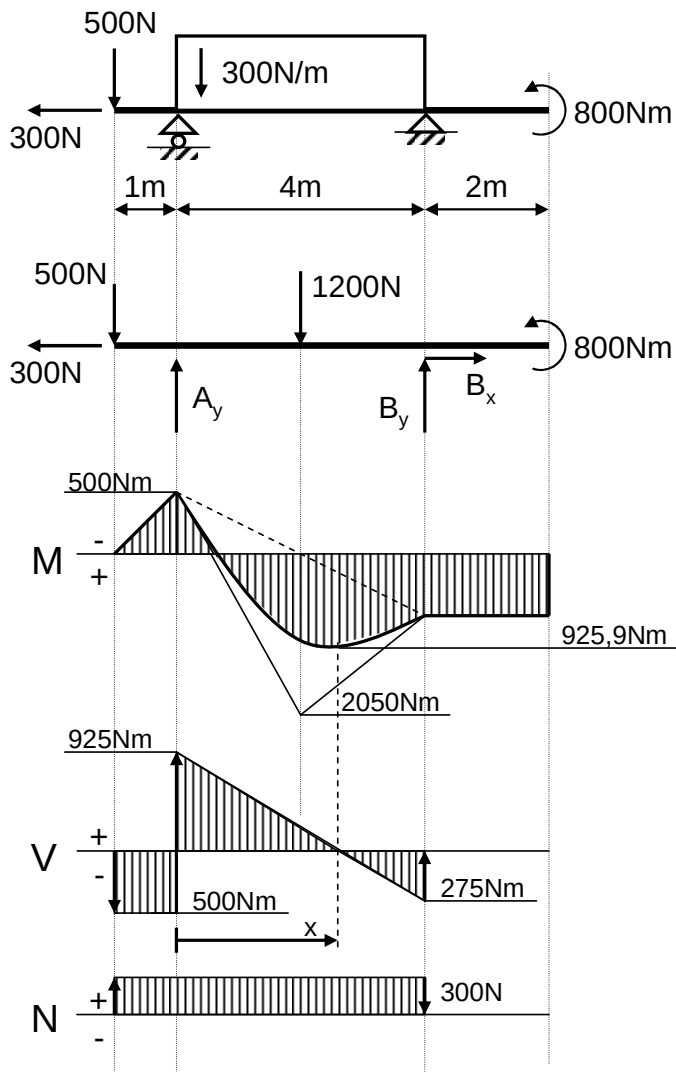
$$\sum Y = 0 \quad A_y - 700 = 0$$

$$A_y = 700 \text{ N}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad M_A - 700 \cdot 2 + 500 = 0$$

$$M_A = 900 \text{ Nm}$$

2. példa



Rajzoljuk meg a tartó igénybevételei ábráját!

Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát!

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum X = 0 \quad -300 + B_x = 0$$

$$B_x = 300 \text{ N}$$

$$\sum M_{(A)} = 0$$

$$500 \cdot 1 - 1200 \cdot 2 + B_y \cdot 4 + 800 = 0$$

$$B_y = 275 \text{ N}$$

$$\sum Y = 0$$

$$-500 - 1200 + 625 + A_y = 0$$

$$A_y = 1425 \text{ N}$$

A nyíróerő függvénye

$$925 - 300 \cdot x = 0$$

$$x = \frac{925}{300} = 3,083 \text{ mm}$$

A maximális nyomaték értéke

$$M = \int_0^{4,083} V dx$$

Ez az előjelhelyes összeg a

nyíróerő ábra alatti terület, vagyis

$$-500 \cdot 1 + \frac{925 \cdot 3,083}{2} = 925,9 \text{ Nm}$$

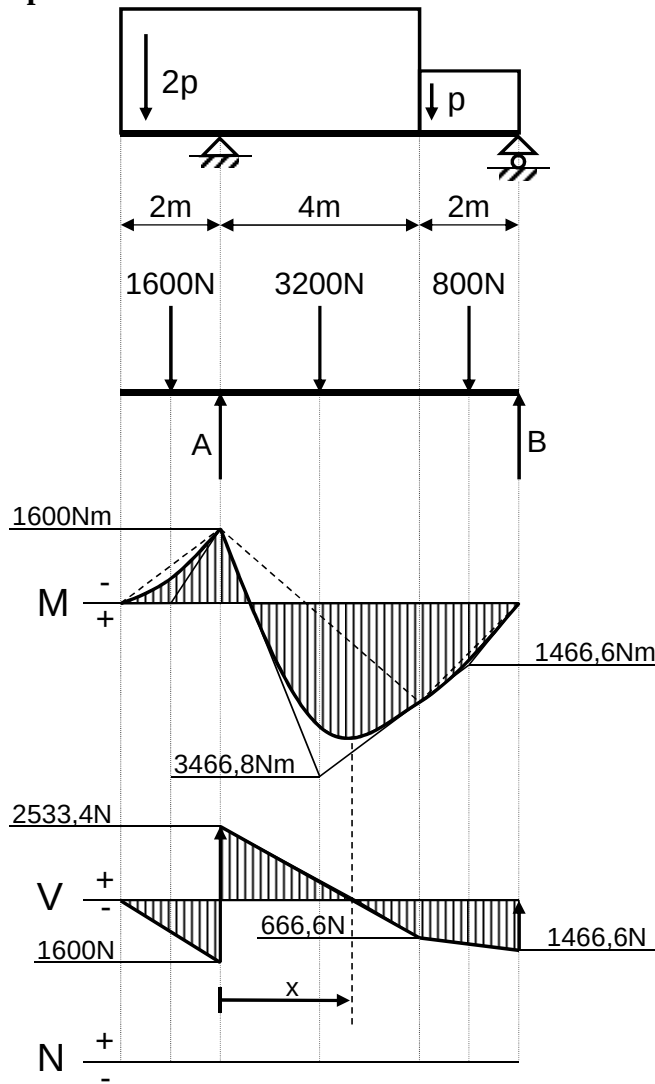
Ez a nyomaték jobbról is számítható.

Itt azonban figyelembe kell venni, hogy a 800Nm-es koncentrált nyomaték is hat, vagyis

$$M_{\max} = \sum M + \int V dx$$

$$\text{Számszerűen: } +800 + \frac{275 \cdot 0,916}{2} = 925,9 \text{ Nm}$$

3. példa



A maximális nyomaték értéke

$$-\frac{1600 \cdot 2}{2} + \frac{2533,4 \cdot 3,17}{2} = 2411\text{Nm}$$

Vagy jobbról

$$\frac{(1466,6 + 666,6) \cdot 2}{2} + \frac{666,6 \cdot 0,83}{2} = 2411\text{Nm}$$

Rajzoljuk meg a tartó igénybevételei ábráját!

Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát!

$$p=400\text{N/m}$$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum X = 0$$

$$A_x = 0\text{N}$$

$$\sum M_{(A)} = 0$$

$$-1600 \cdot 1 + 3200 \cdot 2 + 800 \cdot 5 - B \cdot 6 = 0$$

$$B = 1466,6\text{N}$$

$$\sum Y = 0$$

$$-1600 + A - 3200 - 800 + 1466,6 = 0$$

$$A = 4133,4\text{N}$$

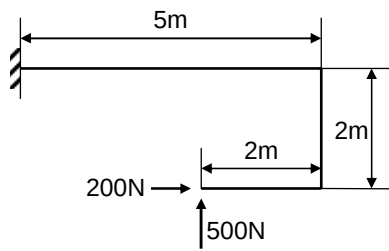
A két parabola egyenlete eltér egymástól, de a kapcsolódási pontban az érintőjük azonos.

A maximális nyomaték helye

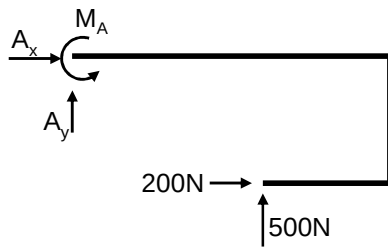
$$2533,4 - 800 \cdot x = 0$$

$$x = 3,17\text{m}$$

4. példa



Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



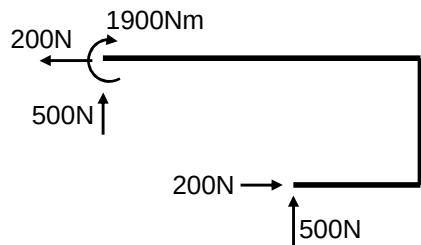
Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad A_x + 200 = 0 \quad A_x = -200 \text{ N}$$

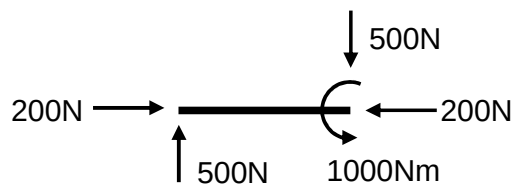
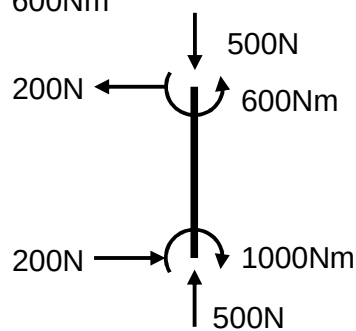
$$\sum Y = 0 \quad A_y + 500 = 0 \quad A_y = -500 \text{ N}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \quad M_A + 500 \cdot 3 + 200 \cdot 2 = 0$$

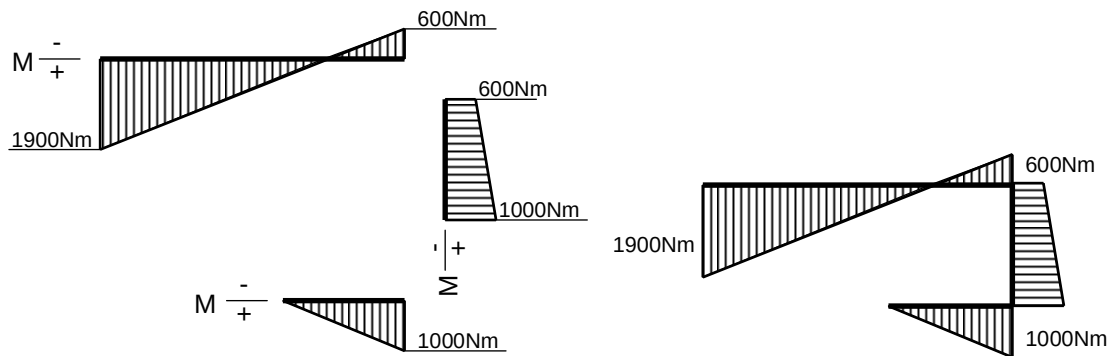
$$M_A = -1900 \text{ Nm}$$



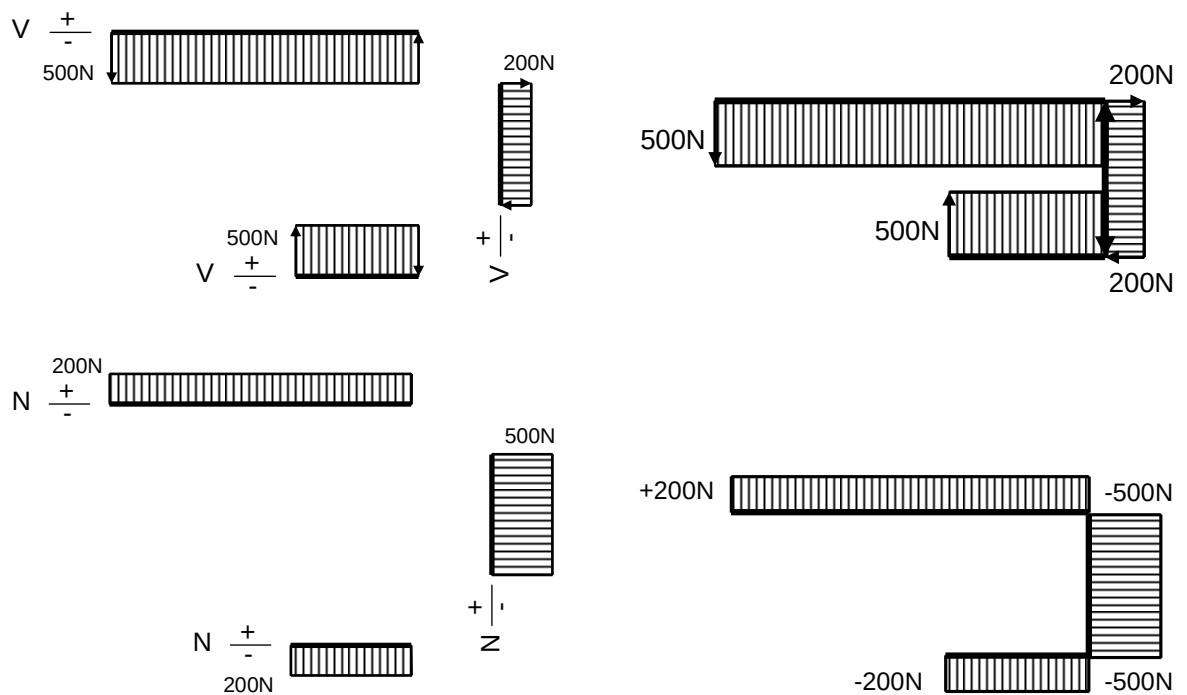
Bontsuk részeire a törttengelyű tartót és a csatlakozó pontokban állítsuk helyre az egyensúlyt!



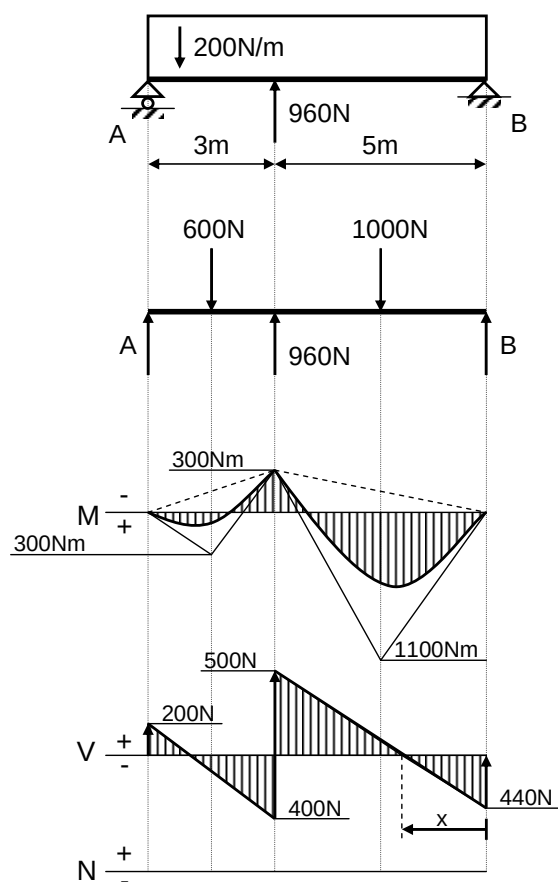
Rajzoljuk meg külön-külön az egyes részek igénybevételi ábráit, majd rajzoljuk össze.



A nyomatéki metszések mindig a húzott oldalon vannak!



5. példa



Számított értékek alapján rajzoljuk meg a tartó nyomatéki és nyíróerő ábráját!
Határozzuk meg a maximális nyomaték nagyságát és helyét!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_A = 0$$

$$600 \cdot 1,5 - 960 \cdot 3 + 1000 \cdot 5,5 - 8B = 0$$

$$B = 440\text{ N}$$

$$\sum Y = 0$$

$$A - 600 + 960 - 1000 + 440 = 0$$

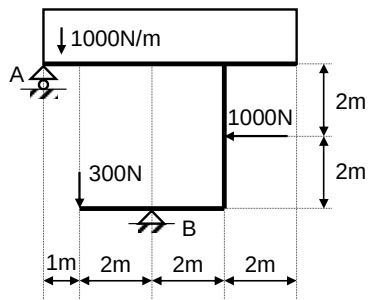
$$A = 200\text{ N}$$

Maximális nyomaték helye

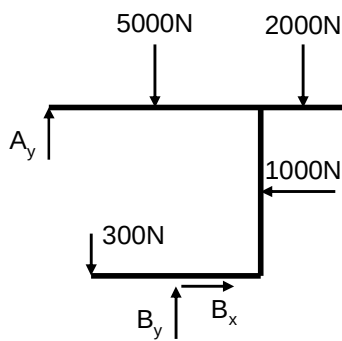
$$x = \frac{440}{200} = 2,2\text{ m}$$

$$M_{\max} = \frac{440 \cdot 2,2}{2} = 484\text{ Nm}$$

6. példa



Határozzuk meg a nyomatéki ábra jellemző értékeit!



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad B_x - 1000 = 0$$

$$B_x = 1000 \text{ N}$$

$$\sum M_B = 0$$

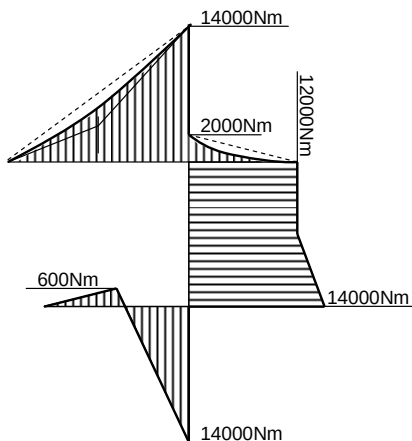
$$A_y \cdot 3 - 5000 \cdot 0,5 + 2000 \cdot 3 - 1000 \cdot 2 - 300 \cdot 2 = 0$$

$$A_y = -300 \text{ N}$$

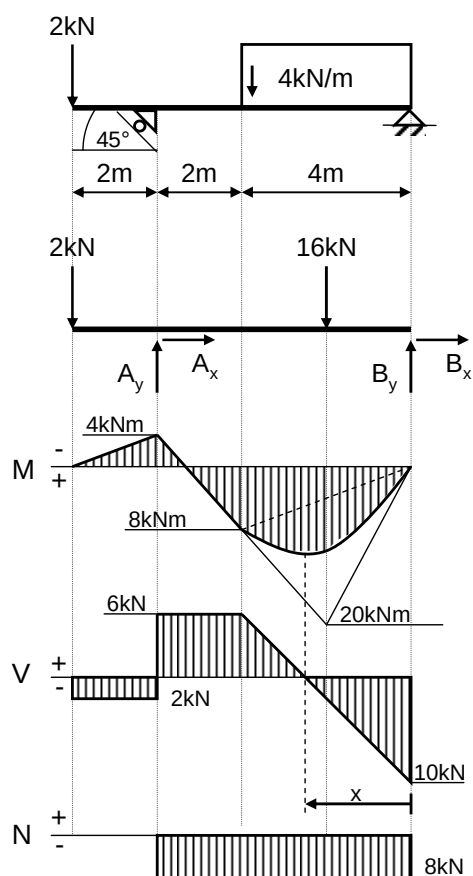
$$\sum Y = 0$$

$$-300 - 5000 - 2000 - 300 + B_y = 0$$

$$B_y = 7600 \text{ N}$$



7. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat!

Egyensúlyi egyenletek

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & A_x + B_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & A_y + B_y - 2 - 16 &= 0 \\ \sum M_A &= 0 & 2 \cdot 2 - 16 \cdot 4 + B_y \cdot 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$A_x = A_y$$

$$B_y = 10 \text{ kN}$$

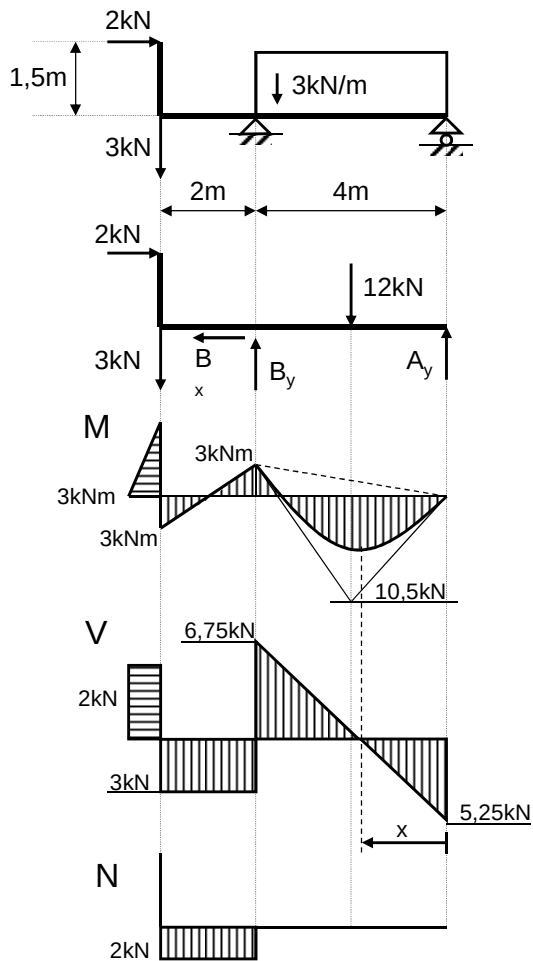
$$A_y = 8 \text{ kN} \rightarrow A_x = 8 \text{ kN}$$

$$B_x = -8 \text{ kN}$$

$$x = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ m}$$

$$M_{\max} = \frac{10 \cdot 2,5}{2} = 12,5 \text{ kNm}$$

8. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat, a jellemző értékek feltüntetésével!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad 2 - B_x = 0 \quad B_x = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$2 \cdot 1,5 - 3 \cdot 2 + 12 \cdot 2 - A_y \cdot 4 = 0$$

$$A_y = 5,25 \text{ kN}$$

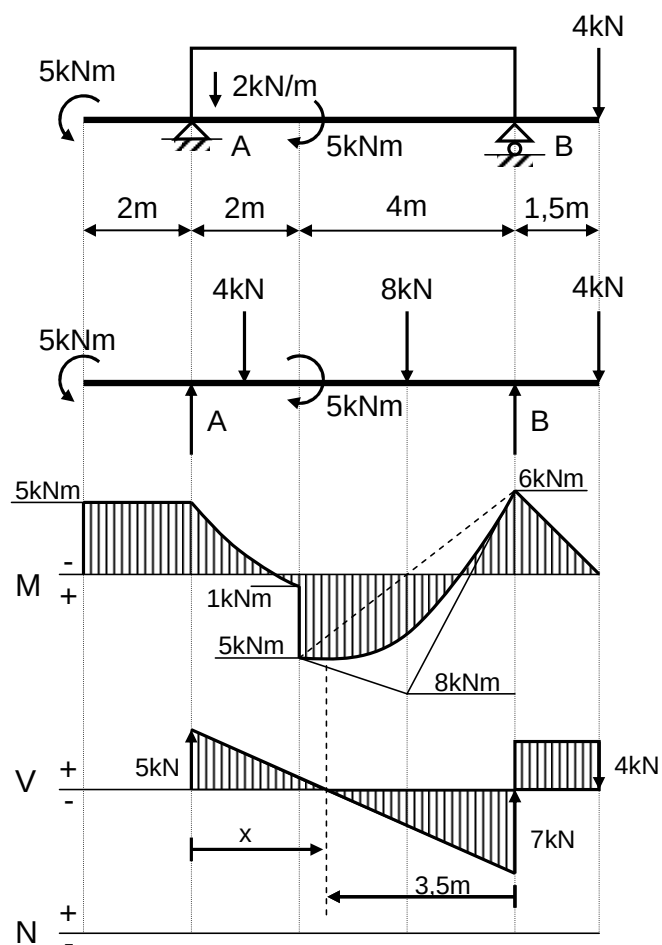
$$\sum Y = 0 \quad -3 + B_y - 12 + 5,25 = 0$$

$$B_y = 9,75 \text{ kN}$$

$$x = \frac{5,25}{3} = 1,75 \text{ m}$$

$$M_{\max} = \frac{5,25 \cdot 1,75}{2} = 4,59 \text{ kNm}$$

9. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_A = 0$$

$$-5 + 4 \cdot 1 + 5 + 8 \cdot 4 - B \cdot 6 + 4 \cdot 7,5 = 0$$

$$B = 11 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$A - 4 - 8 - 4 + 11 = 0$$

$$A = 5 \text{ kN}$$

$$x = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$$

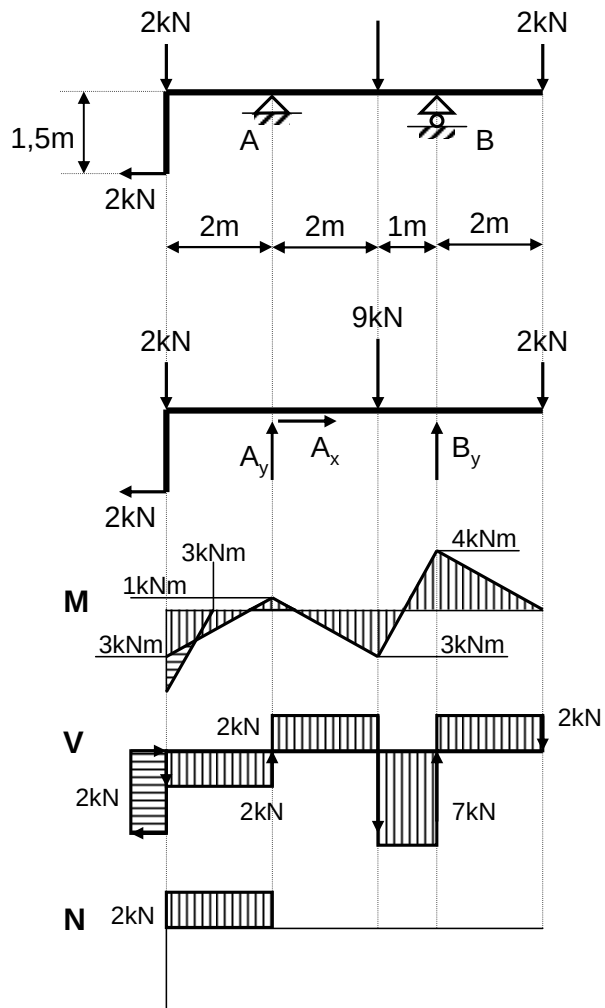
A maximális nyomaték jobbról

$$M_{\max} = -4 \cdot 1,5 + \frac{7 \cdot 3,5}{2} = 6,25 \text{ kNm}$$

vagy balról

$$M_{\max} = -5 + \frac{5 \cdot 2,5}{2} + 5 = 6,25 \text{ kNm}$$

10. példa



Rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad -2 + A_x = 0$$

$$A_x = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 2 + 9 \cdot 2 - B_y \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 0$$

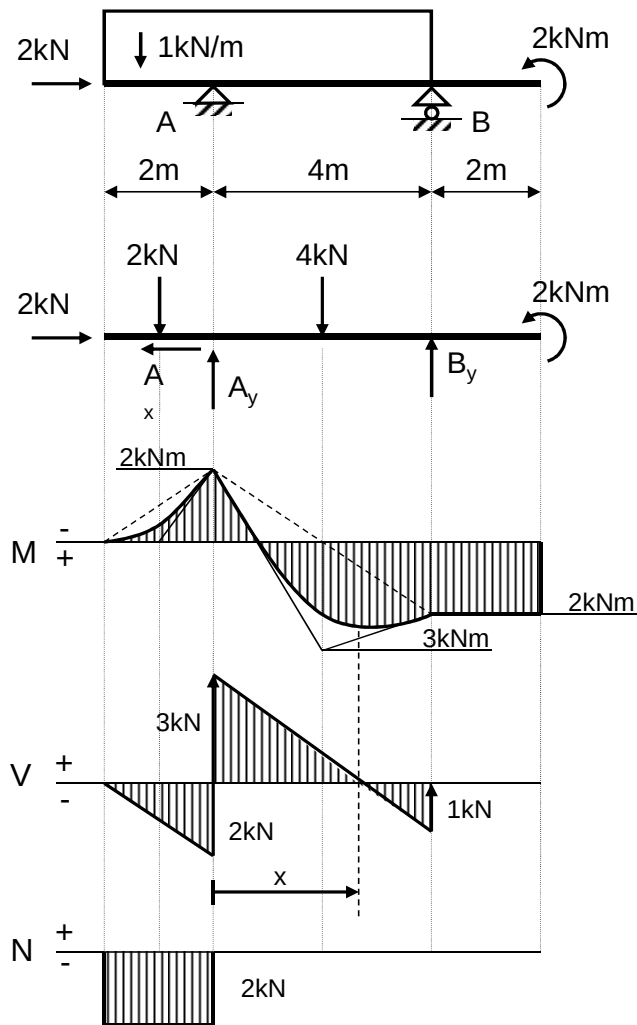
$$B_y = 9 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$-2 + A_y - 9 + 9 - 2 = 0$$

$$A_y = 4 \text{ kN}$$

11. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat, a jellemző értékek feltüntetésével!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad 2 - A_x = 0$$

$$A_x = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 + 2 = 0$$

$$B_y = 1 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \quad -2 + A_y - 4 + 1 = 0$$

$$A_y = 5 \text{ kN}$$

A maximális nyomaték helye

$$x = \frac{3}{1} = 3 \text{ m}$$

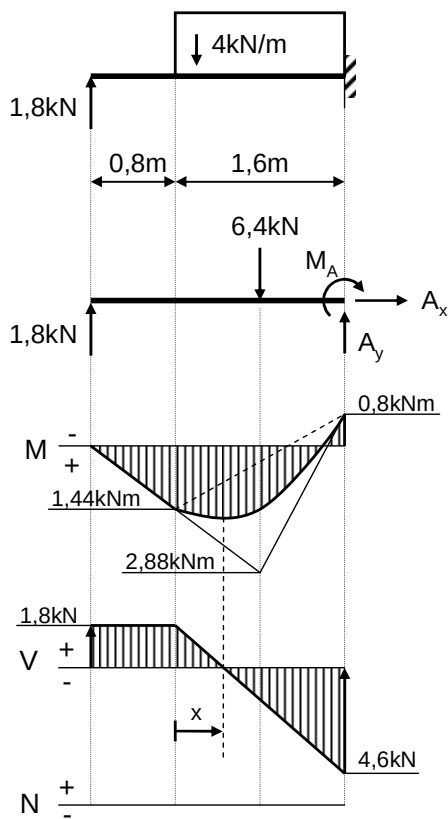
Maximális nyomaték nagysága balról számítva

$$M_{\max} = -\frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} = 2,5 \text{ kNm}$$

illetve jobbról

$$M_{\max} = 2 + \frac{1 \cdot 1}{2} = 2,5 \text{ kNm}$$

12. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat, a jellemző értékek feltüntetésével!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad A_x = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \quad 1,8 \cdot 2,4 - 6,4 \cdot 0,8 + M_A = 0$$

$$M_A = 0,8 \text{ kNm}$$

$$\sum Y = 0 \quad 1,8 - 6,4 + A_y = 0$$

$$A_y = 4,6 \text{ kN}$$

A maximális nyomaték helye

$$x = \frac{1,8}{4} = 0,45 \text{ m}$$

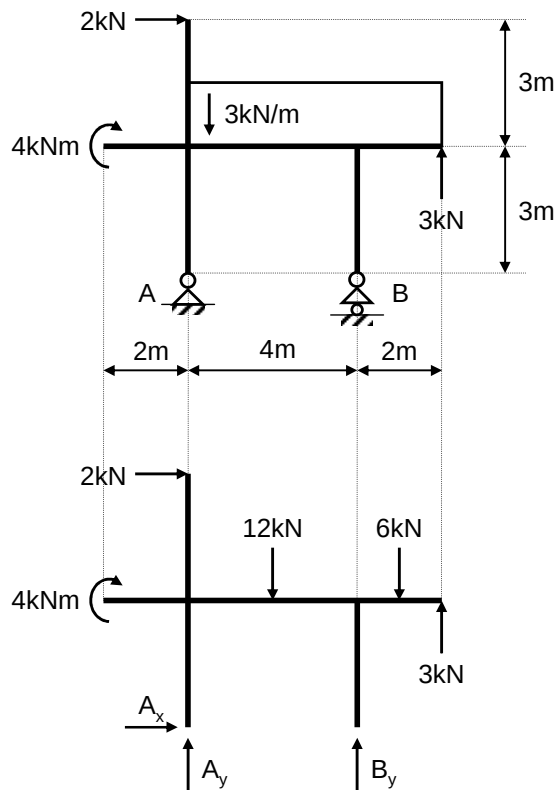
Maximális nyomaték nagysága balról számítva

$$M_{\max} = 1,8 \cdot 0,8 + \frac{1,8 \cdot 0,45}{2} = 1,845 \text{ kNm}$$

illetve jobbról

$$M_{\max} = -0,8 + \frac{4,6 \cdot 1,15}{2} = 1,845 \text{ kNm}$$

13. példa



Rajzoljuk meg a tartó nyomatéki ábráját!
Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és értékét!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad 2 + A_x = 0$$

$$A_x = -2 \text{ kN}$$

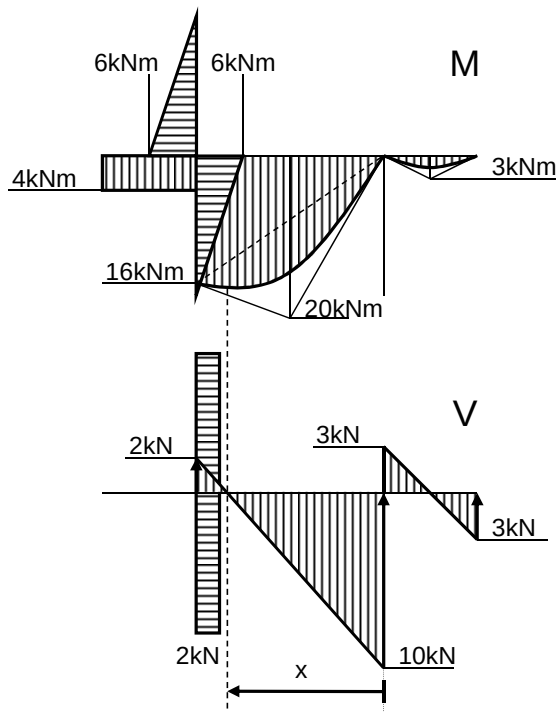
$$\sum M_A = 0$$

$$4 + 2 \cdot 6 + 12 \cdot 2 - 4 \cdot B_y + 6 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 0$$

$$B_y = 13 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \quad A_y - 12 + 13 - 6 + 3 = 0$$

$$A_y = 2 \text{ kN}$$



A maximális nyomaték pontos helyének meghatározásához vizsgáljuk meg a vízszintes tartó nyíróerő ábráját!

A maximális nyomaték helye

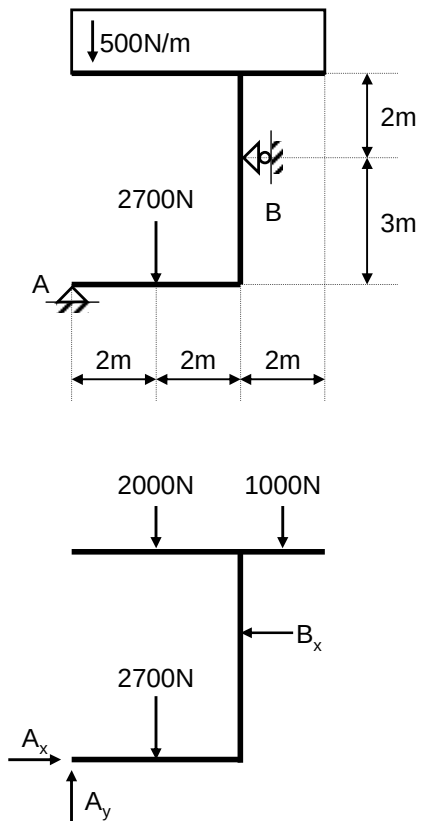
$$x = \frac{10}{3} \text{ m}$$

A maximális nyomaték értéke jobbról

$$M_{\max} = \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{10 \cdot \frac{10}{3}}{2} =$$

$$= \frac{100}{6} = 16,6\dot{6} \text{ kNm}$$

14. példa



Rajzoljuk meg a teljes rúdszerkezet hajlítónyomatéki ábráját!

Az ábrán jelöljük be a számított értékeket!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_A = 0$$

$$2000 \cdot 2 + 2700 \cdot 2 + 1000 \cdot 5 - B_x \cdot 3 = 0$$

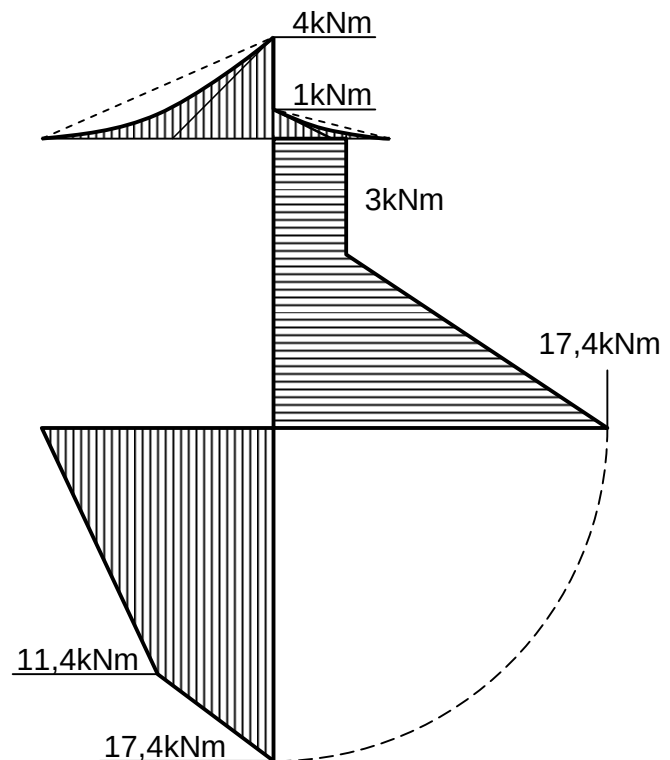
$$B_x = 4800 \text{ N}$$

$$\sum X = 0 \quad A_x - 4800 = 0$$

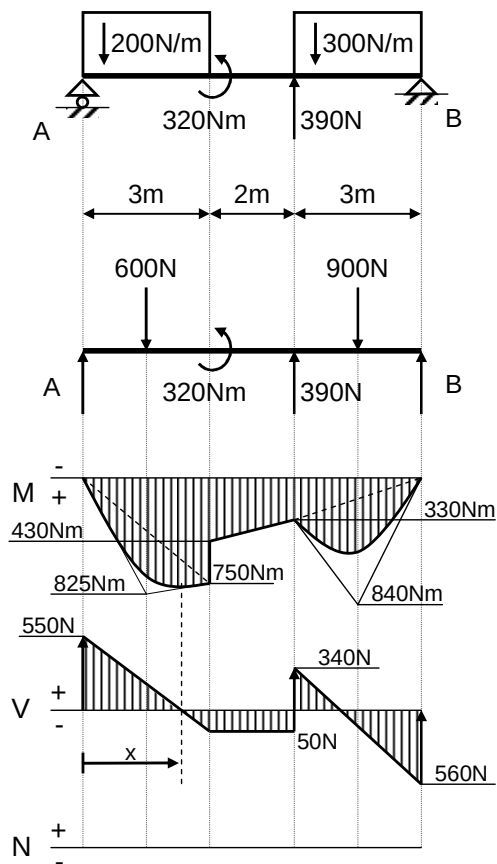
$$A_x = 4800 \text{ N}$$

$$\sum Y = 0 \quad A_y - 2000 - 2700 - 1000 = 0$$

$$A_y = 5700 \text{ N}$$



15. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat, a jellemző értékek feltüntetésével!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_A = 0$$

$$600 \cdot 1,5 - 320 - 390 \cdot 5 + 900 \cdot 6,5 - B \cdot 8 = 0$$

$$B = 560 \text{ N}$$

$$\sum Y = 0$$

$$A - 600 + 390 - 900 + 560 = 0$$

$$A = 550 \text{ N}$$

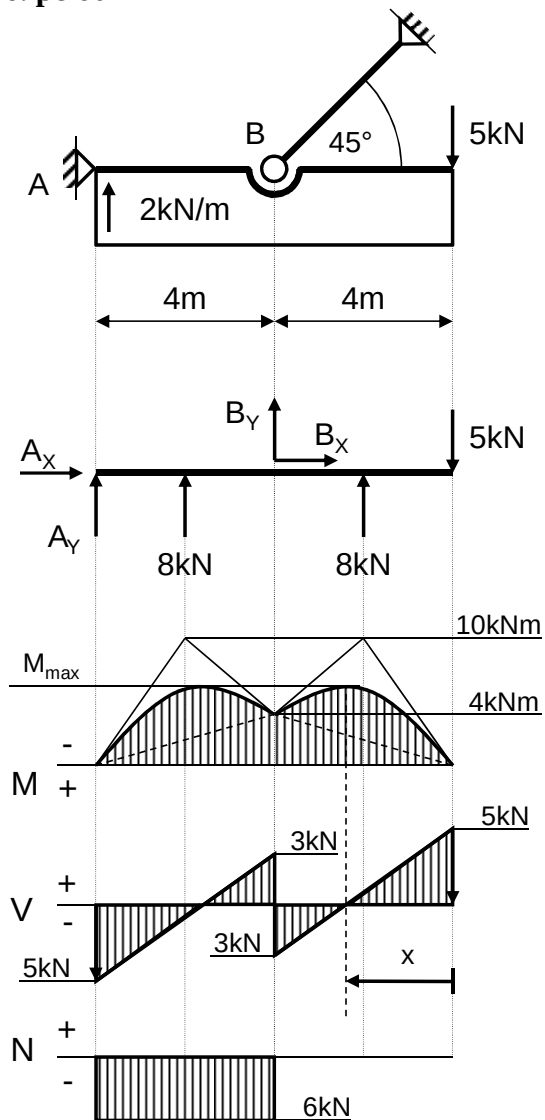
A maximális nyomaték helye

$$x = \frac{550}{200} = 2,75 \text{ m}$$

Maximális nyomaték nagysága

$$M_{\max} = \frac{550 \cdot 2,75}{2} = 756,25 \text{ Nm}$$

16. példa



Határozzuk meg a maximális nyomaték helyét és nagyságát, valamint rajzoljuk meg az M, V, N ábrákat, a jellemző értékek feltüntetésével!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad A_x + B_x = 0$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \\ 8 \cdot 2 + B_y \cdot 4 + 8 \cdot 6 - 5 \cdot 8 = 0 \\ B_y = -6 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 \quad A_y + 8 - 6 + 8 - 5 = 0 \\ A_y = -5 \text{ kN} \\ |B_y| = |B_x| \\ B_x = -6 \text{ kN} \\ A_x = 6 \text{ kN} \end{aligned}$$

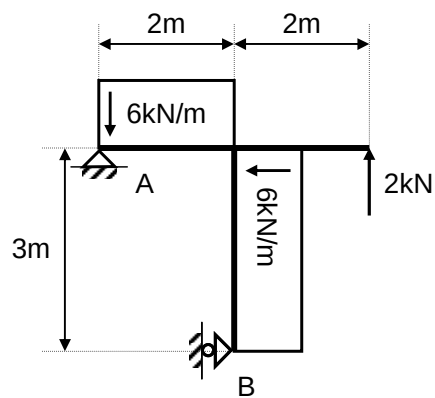
A maximális nyomaték helye

$$x = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$$

Maximális nyomaték nagysága

$$M_{\max} = \frac{5 \cdot 2,5}{2} = 6,25 \text{ kNm}$$

17. példa



Számított értékek alapján rajzoljuk meg a tartó M, V, N ábráit!

Határozzuk meg a maximális hajlítónyomaték helyét és nagyságát!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum Y = 0 \quad A_y - 12 + 2 = 0$$

$$A_y = 10 \text{ kN}$$

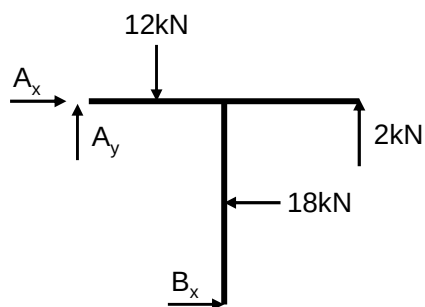
$$\sum M_A = 0$$

$$12 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 18 \cdot 1,5 - B_x \cdot 3 = 0$$

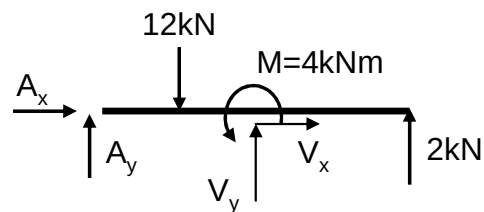
$$B_x = 10,3 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \quad A_x + 10,3 - 18 = 0$$

$$A_x = 7,6 \text{ kN}$$



Az igénybevételi ábra megrajzolásához gondolatban szedjük szét a tartót és előbb a vízszintes, majd a függőleges rész ábráit rajzoljuk meg.



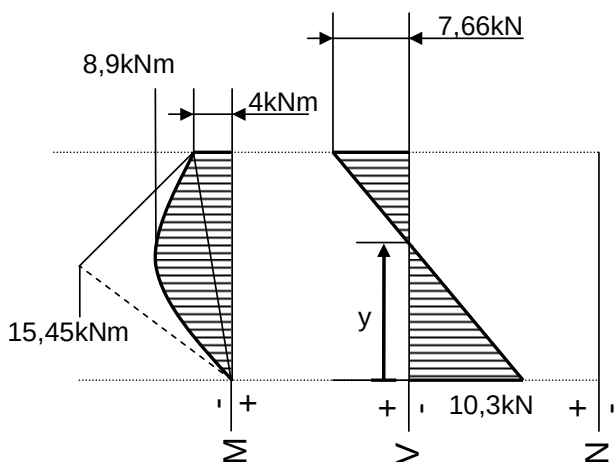
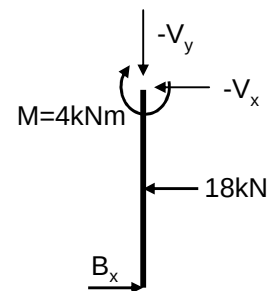
A V_x és V_y és M a két rúd csatlakozásánál ébredő erők illetve nyomaték.

Egyensúlyi egyenletek alapján:

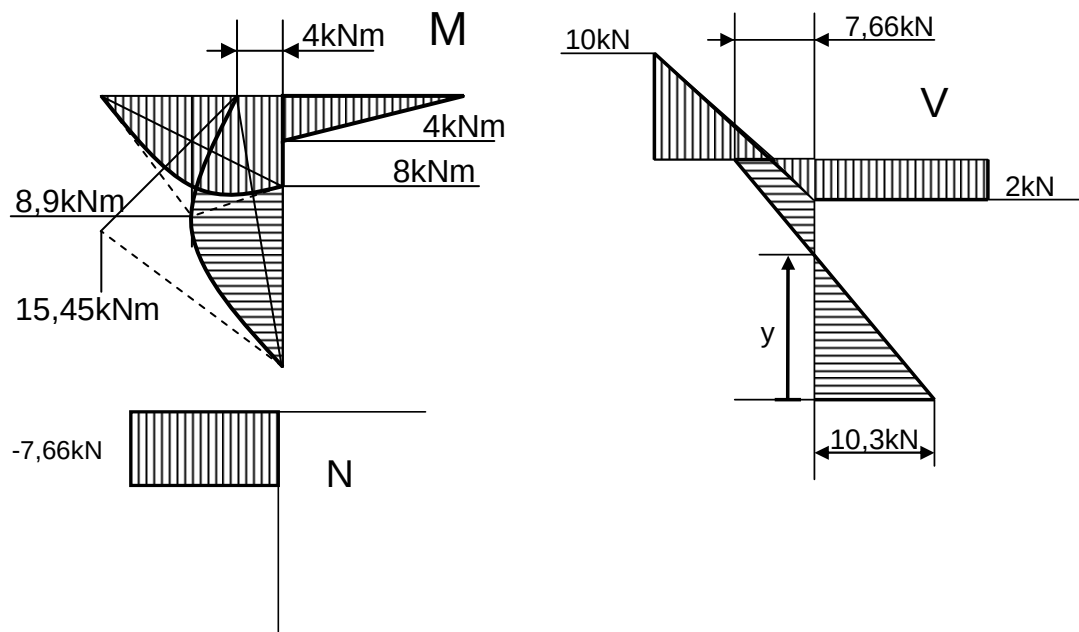
$$V_x = 7,6 \text{ kN}$$

$$V_y = 0 \text{ kN}$$

$$M = 4 \text{ kNm}$$



Az összesített igénybevételi ábra



A maximális nyomatékok helyei

$$x = \frac{10}{6} m$$

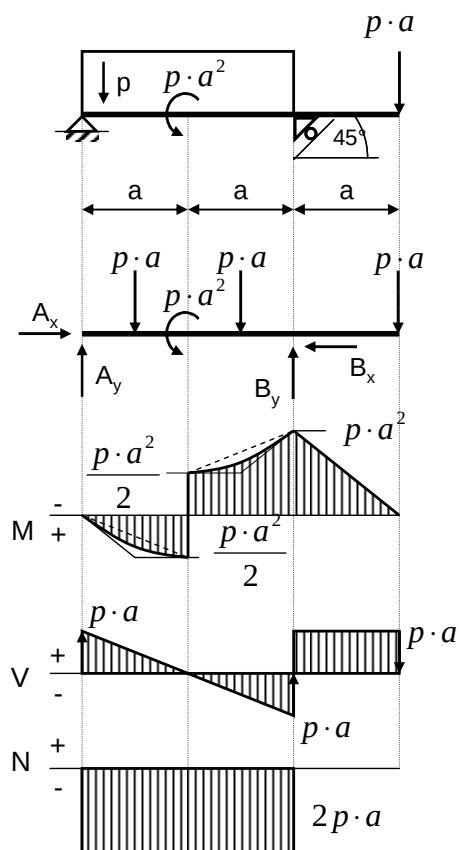
$$y = \frac{10,3}{6} m$$

Maximális nyomatékok nagysága

$$M_{\max} = \frac{A_y \cdot x}{2} = \frac{10 \cdot \frac{10}{6}}{2} = \frac{100}{12} = 8,3 kNm$$

$$M_{\max} = \frac{B_x \cdot y}{2} = \frac{10,3 \cdot \frac{10,3}{6}}{2} = 8,9 kNm$$

18. példa



Számított értékek alapján rajzoljuk meg a tartó M, V, N ábráit!

A csuklós megtámasztásnál a 45° miatt $B_x = B_y$

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_A = 0$$

$$pa \cdot \frac{a}{2} - pa^2 + pa \cdot \frac{3}{2}a - B_y \cdot 2a + pa \cdot 3a = 0$$

$$B_y = 2pa$$

$$B_x = 2pa$$

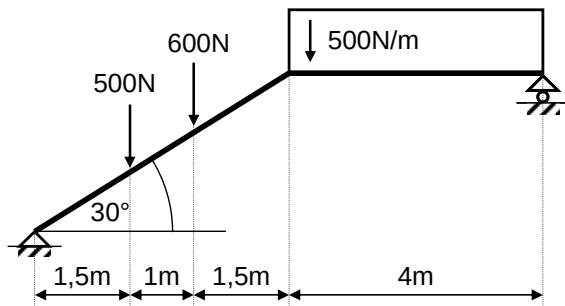
$$A_x = 2pa$$

$$\sum Y = 0$$

$$A_y - pa - pa + 2pa - pa = 0$$

$$A_y = pa$$

19. példa



Rajzolja meg a tartó M, V, N ábráit a jellemző értékek feltüntetésével!

Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

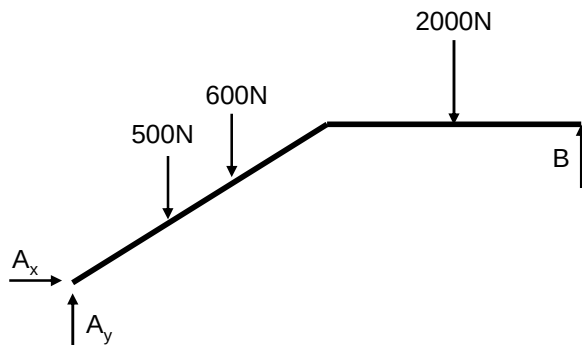
$$500 \cdot 1,5 + 600 \cdot 2,5 + 2000 \cdot 6 - B \cdot 8 = 0$$

$$B = 1781,25 \text{ N}$$

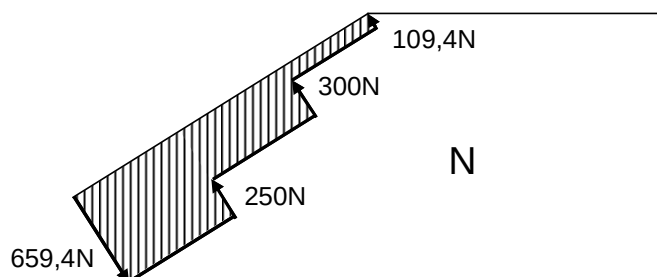
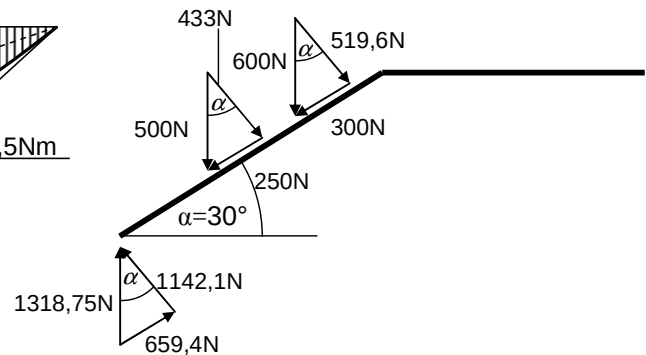
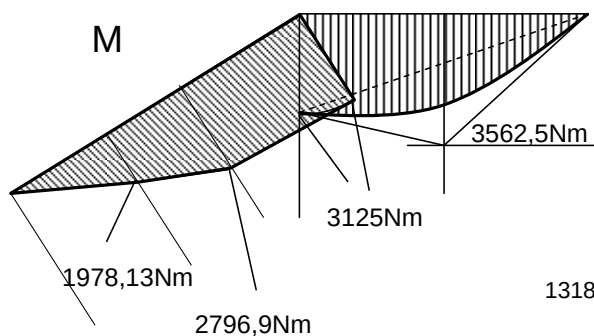
$$\sum Y = 0$$

$$A_y - 500 - 600 - 2000 + 1781,25 = 0$$

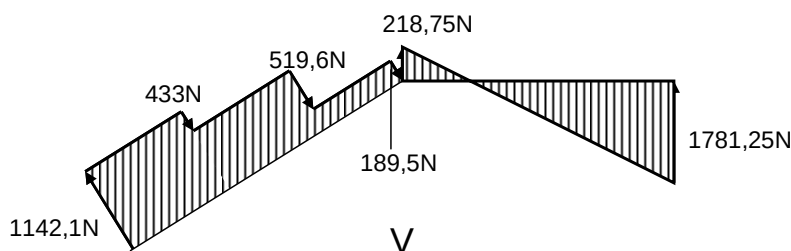
$$A_y = 1318,75 \text{ N}$$



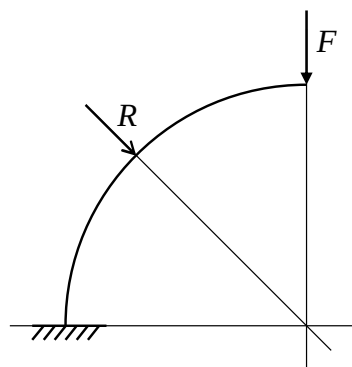
Bontsuk fel a rúd ferde szakaszára ható erőket rúd iránnyú és rúdra merőleges komponensekre.



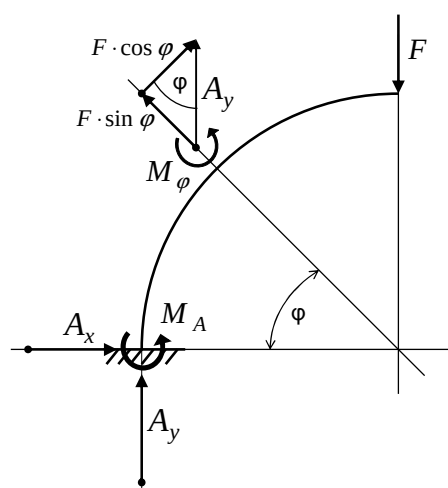
A rúd iránnyú erő hozza létre a normálerőt, és a rúdra merőleges erők a nyírást és a hajlítást.



20. példa



Rajzolja meg a tartó M,V,N ábráit a jellemző értékek fel-
tüntetésével!



Egyensúlyi egyenletek

$$\sum X = 0$$

$$A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A - F \cdot R = 0$$

$$M_A = F \cdot R$$

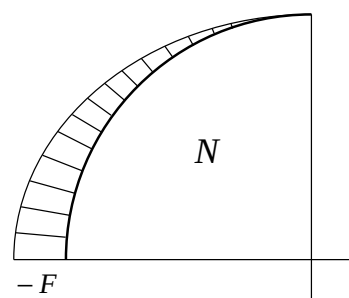
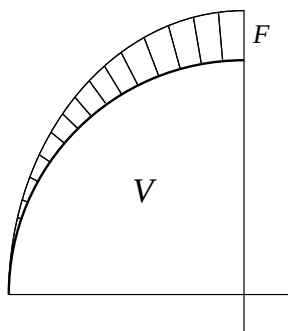
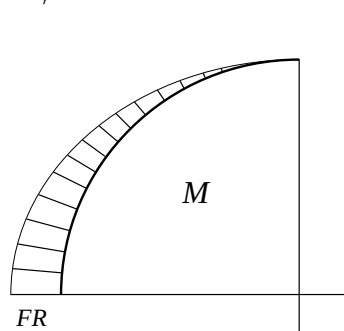
$$\sum Y = 0 \quad A_y - F = 0$$

$$A_y = F$$

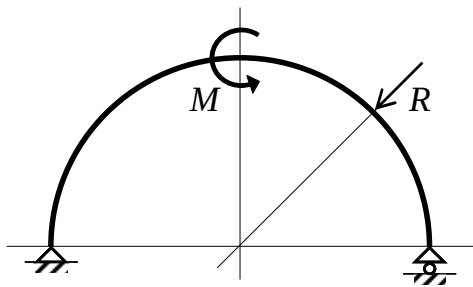
$$M_\varphi = -M_A + A_y \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = -F \cdot R + F \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = -F \cdot R \cdot \cos \varphi$$

$$V_\varphi = F \sin \varphi$$

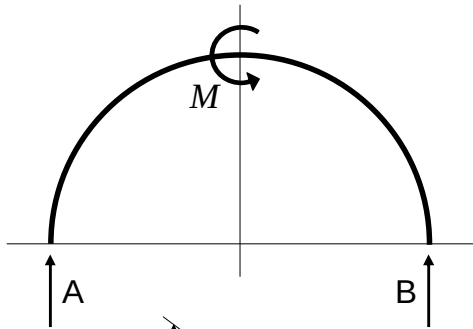
$$N_\varphi = F \cos \varphi$$



21. példa



Rajzolja meg a tartó M,V,N ábráit a jellemző értékek feltüntetésével!



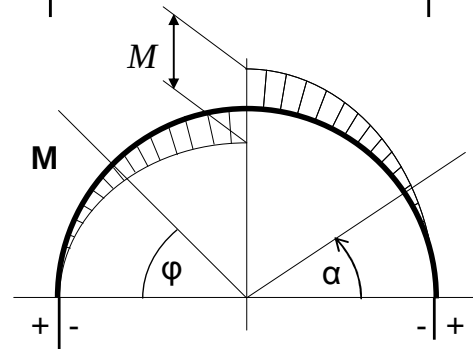
Egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_A = 0 \quad M + B \cdot 2R = 0$$

$$B = -\frac{M}{2R}$$

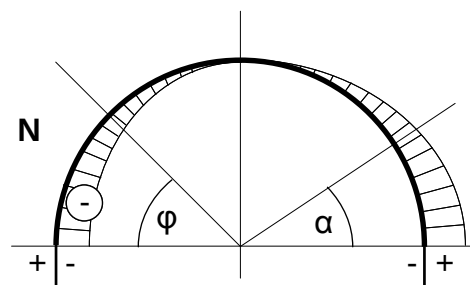
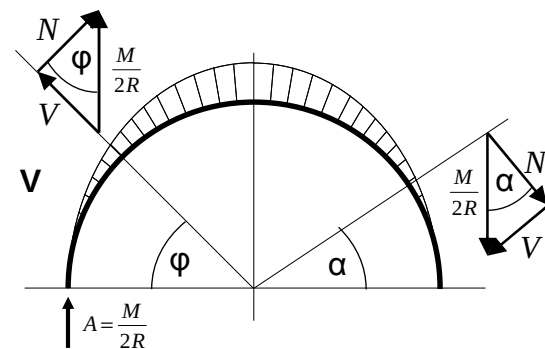
$$\sum Y = 0 \quad A - \frac{M}{2R} = 0$$

$$A = \frac{M}{2R}$$



$$M_\varphi = \frac{M}{2R} \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) = \frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \varphi)$$

$$M_\alpha = -\frac{M}{2R} \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) = -\frac{M}{2} \cdot (1 - \cos \alpha)$$



$$V_\varphi = \frac{M}{2R} \cdot \sin \varphi$$

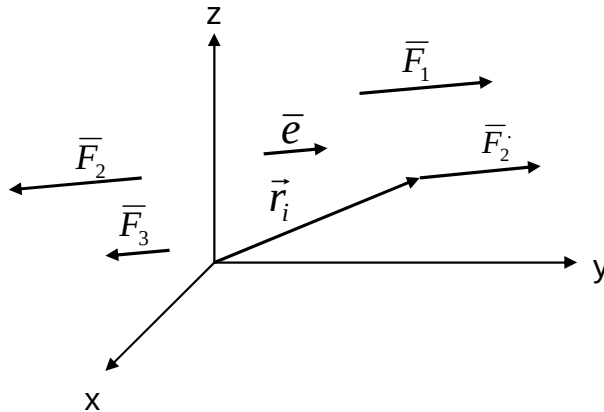
$$V_\alpha = \frac{M}{2R} \cdot \sin \alpha$$

$$N_\varphi = -\frac{M}{2R} \cdot \cos \varphi$$

$$N_\alpha = \frac{M}{2R} \cdot \cos \alpha$$

IV.) Párhuzamos erőrendszerek

1.) Koncentrált erőkből álló párhuzamos erőrendszer



Legyen az erők iránya az $\bar{e}$ egységvektorral párhuzamos.
Az origóhoz tartozó eredő vektorkettős

$$\bar{F}_0 = \sum \bar{F}_i = \bar{e} \sum F_i$$

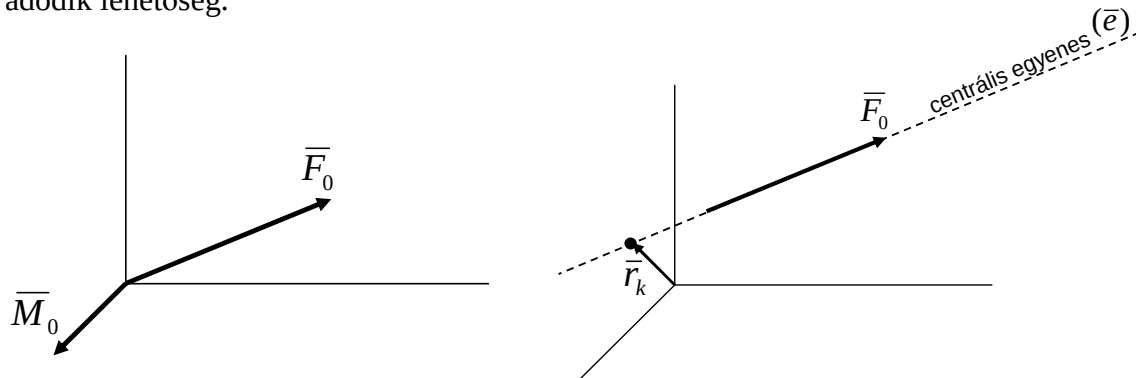
$$\bar{M}_0 = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \left(\sum \bar{r}_i \cdot F_i \right) \times \bar{e}$$

alakú, ahol F_i az i -edik erőhöz tartozó előjeles szám.

Az eredő vektorkettős elemzésével megállapítható, hogy az alábbi lehetőségek közül melyikhez tartozik az erőrendszer.

- Egyensúlyi erőrendszer:
 $\bar{F}_0 = \bar{0}$ és $\bar{M}_0 = \bar{0}$
- Az eredő egyetlen erőpár:
 $\bar{F}_0 = \bar{0}$ és $\bar{M}_0 \neq \bar{0}$
- Az erő egyetlen erő:
 $\bar{F}_0 \neq \bar{0}$ és $\bar{M}_0 = \bar{0}$ vagy $\bar{F}_0 \neq \bar{0}$ és $\bar{M}_0 \neq \bar{0}$

Mivel az $\bar{F}_0$ és $\bar{M}_0$ vektorok biztosan merőlegesek egymásra, az alábbi egyszerűsítésre adódik lehetőség.



A centrális egyenes egy pontját kijelölő helyvektort ($\bar{r}_k$) azon megfontolás alapján kapjuk meg, hogy $\bar{r}_k \times \bar{F}_0 = \bar{M}_0$

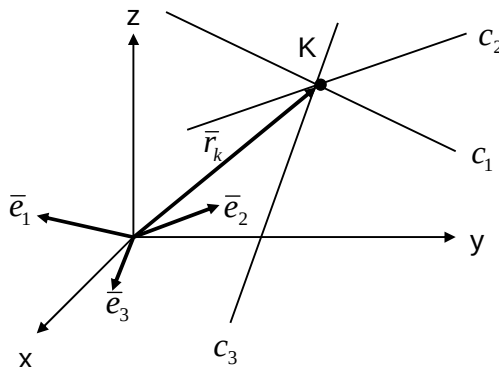
Ezen egyenletbe behelyettesítve az eredő vektorkettős korábbi alakját kapjuk

$$\bar{r}_k \times \bar{e} \sum F_i = \left(\sum \bar{r}_i \cdot F_i \right) \times \bar{e}$$

$$\text{illetve } \bar{r}_k \cdot \left(\sum F_i \right) \times \bar{e} = \left(\sum \bar{r}_i \cdot F_i \right) \times \bar{e}$$

$$\text{amiből } \bar{r}_k = \frac{\sum \bar{r}_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

Ha az erőrendszer minden elemének támadáspontját rögzítjük és az $\bar{e}$ egységvektor irányának változtatásával változtatjuk az egyes erők ($\bar{F}_i$) irányát is, akkor minden $\bar{e}$ irányhoz ($e_1, e_2, \dots, e_n$) tartozik egy centrális egyenes.

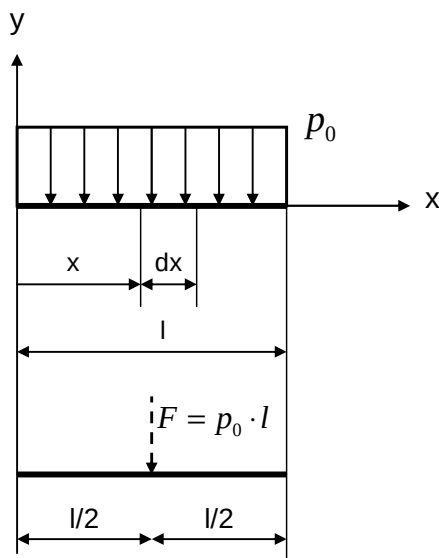


Bizonyítható, hogy ezek a centrális egyenesek egy pontban metszik egymást.

Ezt a pontot az erőrendszer erőközéppontjának nevezzük.

A $\sum \bar{r}_i \cdot \bar{F}_i$ vektort az erőrendszer statikus (vagy elsőrendű) nyomatékvektorának nevezzük.

2.) Megoszló erőrendszer (síkban)



Tekintsünk egy p_0 intenzitású megoszló erőrendszert.

Az erőrendszer eredő erejét az

$$F_0 = \int_0^l p_0 dx = p_0 l \text{ integrál adja.}$$

Az origóhoz tartozó nyomatékot pedig az

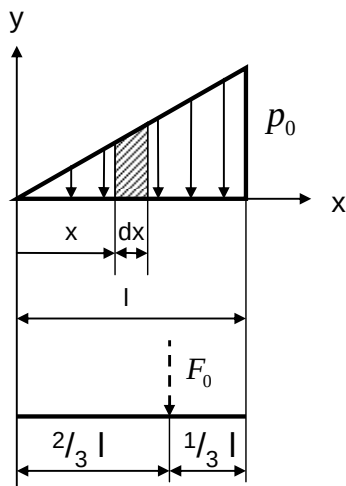
$$M_0 = \int_0^l x \cdot (p_0 dx) = \frac{p_0 l^2}{2}$$

integrállal kapjuk.

Ezen nyomaték vektora a síkra merőleges.

Az erőrendszer erőközéppontja, ahol az erőrendszer helyettesíthető egyetlen erővel

$$r_k = \frac{\int x \cdot p_0 dx}{\int p_0 dx} = \frac{\frac{p_0 l^2}{2}}{p_0 l} = \frac{l}{2}$$

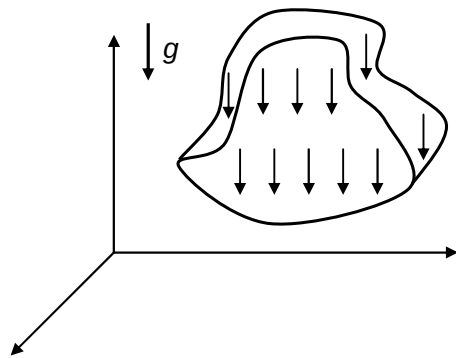


Tekintsünk egy egyenletesen változó megoszló erőrendszert.

A fenti gondolatmenetet alkalmazva:

$$r_k = \frac{\int_0^l x \cdot \left(\frac{p_0}{l} \cdot x \cdot dx \right)}{\int_0^l \frac{p_0}{l} \cdot x \cdot dx} = \frac{\frac{p_0 l^2}{3}}{\frac{p_0 l}{2}} = \frac{2}{3} l$$

3.) Súlypont, tömegközéppont és geometriai középpont



A test súlypontján a térfogaton megoszló elemi súlyerők erőközéppontját értjük.

$$\bar{r}_k = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot \rho \cdot g \cdot dV}{\int_{(V)} \rho \cdot g \cdot dV} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot \rho \cdot dV}{\int_{(V)} \rho \cdot dV} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot dm}{\int_{(V)} dm}$$

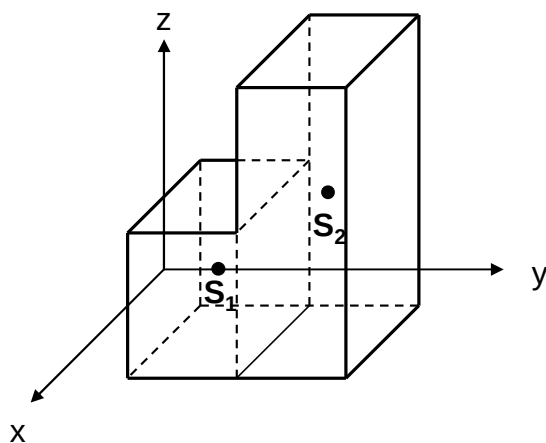
Homogén tömegeloszlású testek esetén az

$$\bar{r}_k = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot dV}{\int_{(V)} dV} \text{ kifejezés adja meg a súlypont helyét.}$$

A fentiek alapján megállapítható, hogy a testek súlypontja és tömegközéppontja ugyan az a pont.

Amennyiben homogén tömegeloszlású a test, akkor a geometriai középpont is meg-
egyezik az előző kettővel.

Összetett testek esetén, amikor ismerjük az egyes összetevők geometriai és tömegadata-
it, a következő eljárással számítható a súlypont, illetve a tömegközéppont.



$$S_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$S_2(x_2, y_2, z_2)$$

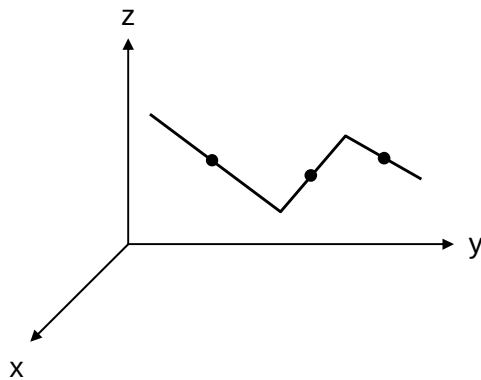
$$X_s = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i}$$

$$Y_s = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{\sum m_i}$$

$$Z_s = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{\sum m_i}$$

$$\bar{r} = \frac{\sum \bar{r}_i \cdot m_i}{\sum m_i}$$

4.) Vonalak súlypontja



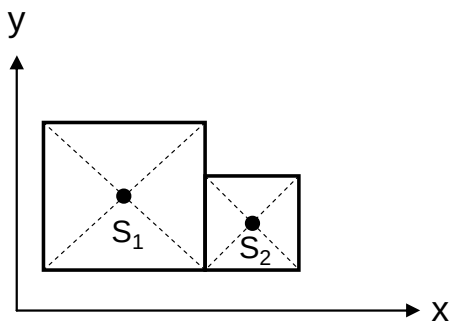
A vonalak olyan testeknek tekinthetők, amelyek keresztmetszete (A_0) rendkívül kicsi. Ennek megfelelően

$$\bar{r}_k = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot dV}{\int_{(V)} dV} = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot A_0 \cdot dl}{\int_{(V)} A_0 \cdot dl} = \frac{\int_{(l)} \bar{r} \cdot dl}{\int_{(l)} dl}$$

Több darabból álló vonalak esetén is igaz, hogy

$$X_s = \frac{\sum x_i \cdot l_i}{\sum l_i} \quad Y_s = \frac{\sum y_i \cdot l_i}{\sum l_i} \quad Z_s = \frac{\sum z_i \cdot l_i}{\sum l_i}$$

5.) Síkidomok súlypontja



A síkidomok olyan testeknek tekinthetők, amelyeknek vastagsága (v) rendkívül kicsi. Ennek megfelelően

$$\bar{r}_k = \frac{\int_{(V)} \bar{r} \cdot v \cdot dA}{\int_{(V)} v \cdot dA} = \frac{\int_{(A)} \bar{r} \cdot dA}{\int_{(A)} dA} =$$

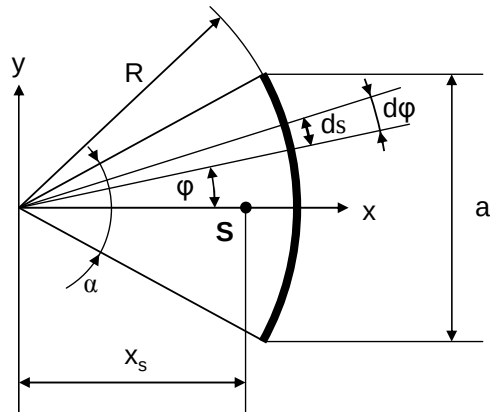
Összetett síkidomok esetén:

$$X_s = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad Y_s = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} \quad Z_s = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i}$$

Homogén tömegeloszlás esetén a súlypont mindig rajta van a szimmetriatengelyen.

6.) Példák a párhuzamos erőrendszerek témakörből

1. példa

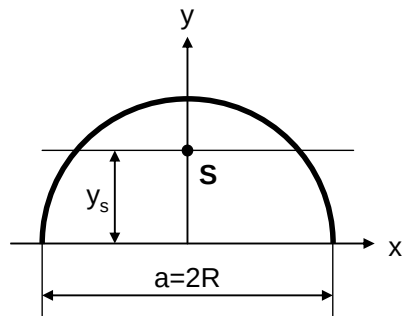


Határozzuk meg az α nyílásszögű R sugarú körív súlypontjának koordinátáit!

A szimmetria miatt az $Y_s = 0$

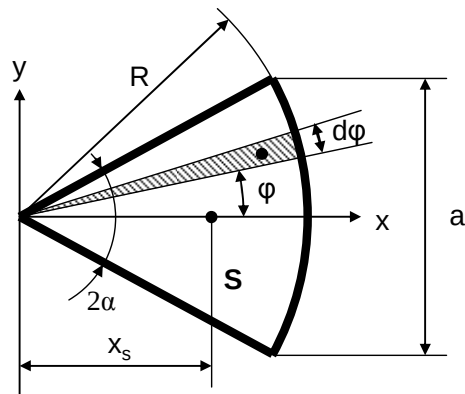
$$X_s = \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} R \cos \varphi \cdot R d\varphi}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} ds} = \frac{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} R^2 \cos \varphi \cdot d\varphi}{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} R \cdot d\varphi} = \frac{2 \cdot R^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{R \cdot \alpha} = \frac{2 \cdot R \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

Félkör alakú vonaldarab súlypontja

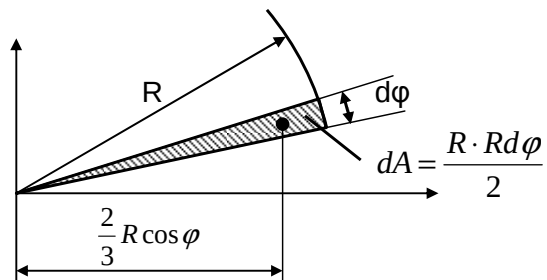


$$Y_s = \frac{2R \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

2. példa



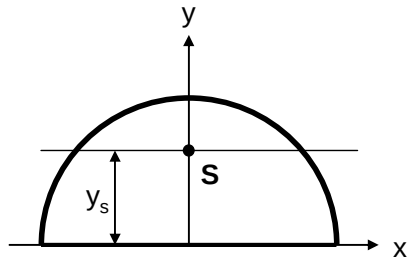
Határozzuk meg a 2α nyílásszögű köríkk súlypontjának helyét!



A szimmetria miatt az $Y_s = 0$

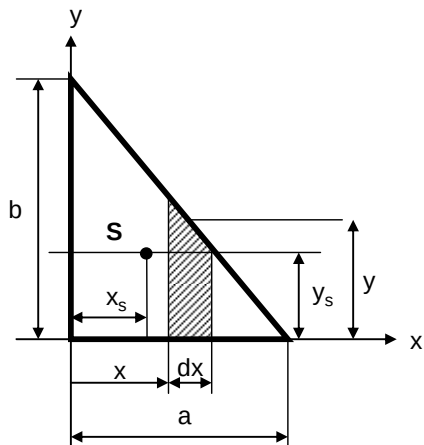
$$X_s = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} R \cos \varphi \cdot dA}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} dA} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} R \cos \varphi \cdot \frac{R^2 d\varphi}{2}}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{R \cdot R d\varphi}{2}} = \frac{\frac{R^3}{3} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi \cdot d\varphi}{R^2 \alpha} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha}{R^2 \alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\alpha}$$

Félkör alakú síkidom esetén



$$Y_s = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

3. példa



Határozzuk meg a vázolt háromszög súlypontjának koordinátáit!

A háromszög átfogójának egyenlete:

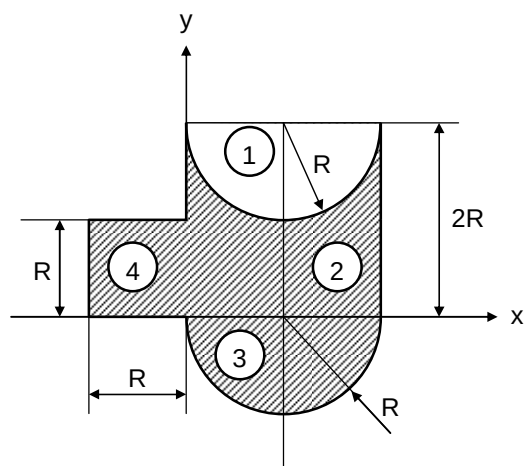
$$y = b - \frac{b}{a}x$$

$$X_s = \frac{\int_0^a x \cdot dA}{\int_0^a dA} = \frac{\int_0^a xy \cdot dx}{\int_0^a y \cdot dx} = \frac{\int_0^a x \left(b - \frac{b}{a}x \right) dx}{\int_0^a \left(b - \frac{b}{a}x \right) dx} = \frac{b \frac{a^2}{2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{a^3}{3}}{b \cdot a - \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2}} = \frac{a \cdot b \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3} \right)}{\frac{ab}{2}} = \frac{\frac{a^2 b}{6}}{\frac{ab}{2}} = \frac{a}{3}$$

Hasonló megoldással

$$Y_s = \frac{b}{3}$$

4. példa



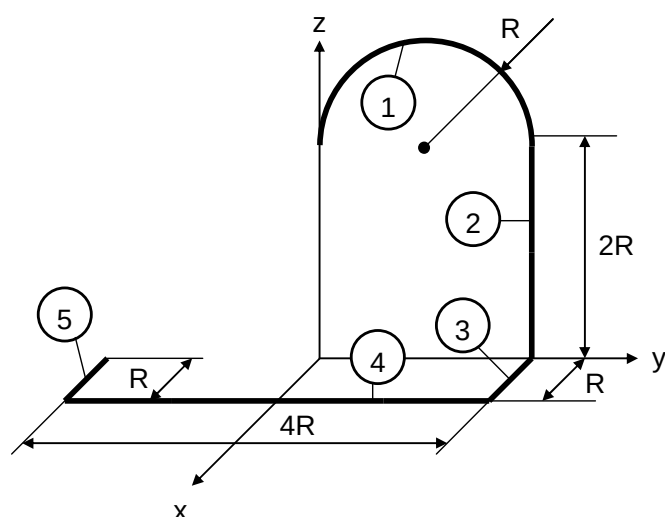
Határozzuk meg a vázolt síkidom súlypontjának helyét!

Bontsuk fel a síkidomot ismert területű és súlypontú részekre!

	A_i	x_i	y_i	$x_i \cdot A_i$	$y_i \cdot A_i$
1	$-\frac{R^2\pi}{2}$	R	$2R - \frac{4R}{3\pi}$	$-\frac{R^3\pi}{2}$	$-R^3\pi + \frac{4}{6}R^3$
2	$2R \cdot 2R$	R	R	$4R^3$	$4R^3$
3	$\frac{R^2\pi}{2}$	R	$-\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{R^3\pi}{2}$	$-\frac{4}{6}R^3$
4	R^2	$-\frac{R}{2}$	$\frac{R}{2}$	$-\frac{R^3}{2}$	$\frac{R^3}{2}$
Σ	$5R^2$			$\frac{7}{2}R^3$	$\frac{7}{2}R^3 - R^3\pi$

$$X_s = \frac{\frac{7}{2}R^3}{5R^2} = \frac{7}{10}R \quad Y_s = \frac{\frac{7}{2}R^3 - R^3\pi}{5R^2} = 7R - \frac{R\pi}{5}$$

5. példa



Határozzuk meg a vázolt görbe súlypontját!

Bontsuk fel a görbét ismert hosszúságú és súlypontú görbedarabokra!

Az $\bar{r}_k = \frac{\sum \bar{r}_i \cdot l_i}{\sum l_i}$ összefüggés alapján az alábbi táblázat kitöltésével megkapjuk a súlypont koordinátáit.

	l_i	x_i	y_i	z_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$	$z_i l_i$
1	$R\pi$	0	R	$2R + \frac{2R}{\pi}$	0	$R^2\pi$	$R\pi \left(2R + \frac{2R}{\pi} \right)$
2	$2R$	0	2R	R	0	$4R^2$	$2R^2$
3	R	$\frac{R}{2}$	2R	0	$\frac{R^2}{2}$	$2R^2$	0
4	4R	R	0	0	$4R^2$	0	0
5	R	$\frac{R}{2}$	-2R	0	$\frac{R^2}{2}$	$-2R^2$	0
Σ	$R\pi + 8R$				$5R^2$	$R^2\pi + 4R^2$	$2R^2\pi + 2R^2$

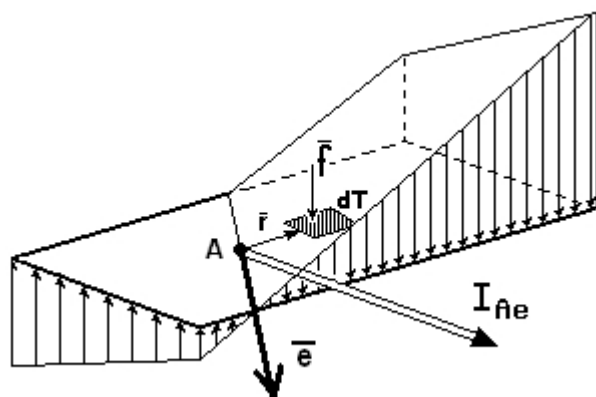
$$X_s = \frac{\sum x_i l_i}{\sum l_i} = \frac{5R^2}{R(8+\pi)} = \frac{5R}{8+\pi}$$

$$Y_s = \frac{\sum y_i l_i}{\sum l_i} = \frac{R^2(\pi+4)}{R(8+\pi)} = \frac{R(\pi+4)}{8+\pi}$$

$$Z_s = \frac{\sum z_i l_i}{\sum l_i} = \frac{2R^2(\pi+1)}{R(8+\pi)} = \frac{2R(\pi+1)}{8+\pi}$$

V.) Másodrendű nyomaték

1.) A másodrendű nyomaték értelmezése



Tekintsünk egy síkidomon lineárisan változó intenzitású megoszló erőrendszert. Az $\bar{e}$ egységvektorral kijelölt egyenes mentén a megoszló erőrendszer intenzitása zérus, míg a $\bar{r}$ helyvektorral jellemzett dT elemi tartományon az intenzitás $\bar{f} = \lambda(\bar{e} \times \bar{r})$.

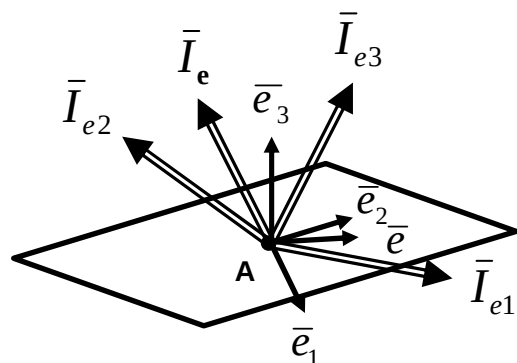
Képezzük a megoszló erőrendszer nyomatékát a zérus intenzitású egyenes (semleges tengely) tetszőleges A pontjára.

$$\bar{M}_A = \int_{(T)} \bar{r} \times [\lambda(\bar{e} \times \bar{r})] dT = \lambda \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{e} \times \bar{r}) dT = \lambda \bar{I}_{Ae}$$

Az $\bar{I}_{Ae} = \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{e} \times \bar{r}) dT$ integrál – az A pont és az $\bar{e}$ egységvektor megválasztása után

– csak a síkidom geometriai viszonyától függ és a másodrendű nyomaték vektorát adja. A másodrendű nyomaték vektora benne fekszik a síkban!

Az indexek arra utalnak, hogy a nyomatékvektor függ a kiválasztott ponttól és az $\bar{e}$ egységvektor irányától.



Az A pontra illeszkedő végtelen sok egységvektor közül azonban csak három lehet lineárisan független egymástól. A három egységvektor függetlenségének feltétele, hogy $\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3 \neq 0$ vegyes szorzat nem lehet nulla. Máshogyan fogalmazva a három egységvektor nem lehet komplanáris (nem lehet egy síkban).

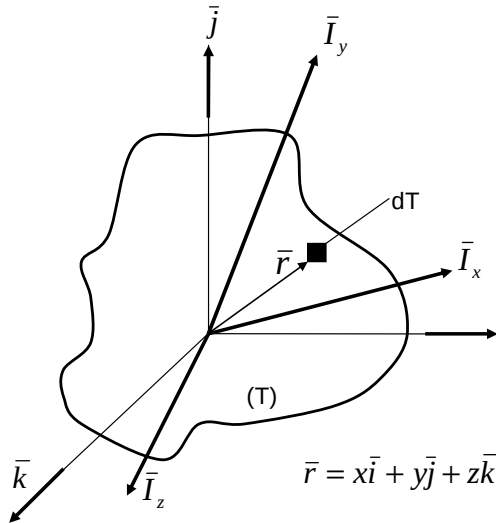
Ha ismerjük a három egységvektorhoz tartozó $\bar{I}_{e1}, \bar{I}_{e2}, \bar{I}_{e3}$ másodrendű nyomatékvektorokat, akkor az A ponthoz tartozó bármely egységvektorhoz meg tudjuk határozni a másodrendű nyomaték vektorát.

Tetszőleges $\bar{e}$ egységvektor előállítható $\bar{e} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3$ alakban a hozzá tartozó másodrendű nyomaték vektora pedig az alábbi alakban adódik.

$$\bar{I}_e = \lambda_1 \bar{I}_{e1} + \lambda_2 \bar{I}_{e2} + \lambda_3 \bar{I}_{e3}$$

2.) Másodrendű nyomaték az xyz derékszögű koordinátarendszerben

Az előzőekben alkalmazott $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ egységvektorok helyett válasszuk most a jobbsodrású xyz derékszögű koordinátarendszer $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ egységvektorait.



Az x tengelyhez tartozó másodrendű nyomatékvektor a definíció szerint

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{i} \times \bar{r}) dT = \int_{(T)} \bar{i} (\bar{r} \bar{r}) dT - \int_{(T)} \bar{r} (\bar{i} \bar{r}) dT = \\ &= \int_{(T)} \bar{i} (x^2 + y^2 + z^2) dT - \int_{(T)} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) x dT = \\ &= \bar{i} \int_{(T)} (y^2 + z^2) dT - \bar{j} \int_{(T)} xy dT - \bar{k} \int_{(T)} xz dT\end{aligned}$$

A fenti levezetésben felhasználtuk a kifejtési tételt. (lásd matematikai összefoglaló)

Az előzőhöz hasonlóan adódik

$$\begin{aligned}\bar{I}_y &= \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{j} \times \bar{r}) dT = \int_{(T)} \bar{j} (\bar{r} \bar{r}) dT - \int_{(T)} \bar{r} (\bar{j} \bar{r}) dT = \\ &= \int_{(T)} \bar{j} (x^2 + y^2 + z^2) dT - \int_{(T)} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) y dT = \\ &= -\bar{i} \int_{(T)} xy dT + \bar{j} \int_{(T)} (x^2 + z^2) dT - \bar{k} \int_{(T)} yz dT\end{aligned}$$

Illetve

$$\begin{aligned}\bar{I}_z &= \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{k} \times \bar{r}) dT = \int_{(T)} \bar{k} (\bar{r} \bar{r}) dT - \int_{(T)} \bar{r} (\bar{k} \bar{r}) dT = \\ &= \int_{(T)} \bar{k} (x^2 + y^2 + z^2) dT - \int_{(T)} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) z dT = \\ &= -\bar{i} \int_{(T)} xz dT - \bar{j} \int_{(T)} yz dT + \bar{k} \int_{(T)} (x^2 + y^2) dT\end{aligned}$$

Tetszőleges

$$\bar{e} = \lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j} + \lambda_3 \bar{k}$$

Egységvektorhoz tartozó másodrendű nyomaték

$$\bar{I}_e = \lambda_1 \bar{I}_x + \lambda_2 \bar{I}_y + \lambda_3 \bar{I}_z$$

Mivel az $\bar{I}_e$ vektor a hozzá tartozó $\bar{e}$ egységvektornak homogén lineáris függvénye, a kapcsolat tenzor segítségével is leírható.

Az $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ másodrendű nyomaték tenzora

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{I}}} &= [\bar{I}_x, \bar{I}_y, \bar{I}_z] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{zy} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{yx} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{zy} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \int_{(T)} (y^2 + z^2) dT & -\int_{(T)} yx dT & -\int_{(T)} zx dT \\ -\int_{(T)} xy dT & \int_{(T)} (x^2 + z^2) dT & -\int_{(T)} zy dT \\ -\int_{(T)} xz dT & -\int_{(T)} yz dT & \int_{(T)} (x^2 + y^2) dT \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Az azonos indexű elemeket a megfelelő tengelyre számított (ekvatoriális) másodrendű nyomatéknak, a vegyes indexű elemeket vegyes (centrifugális, deviációs) másodrendű nyomatéknak nevezzük. A tenzor felírásából látható, hogy a másodrendű nyomaték tenzora szimmetrikus és a főátlóbeli elemek mindig pozitívak. A most megismert tenzor segítségével lehetővé válik tetszőleges – a bázisvektorok metszéspontján átmenő – $\bar{\mathbf{e}}$ egységvektorhoz tartozó másodrendű nyomatékvektor meghatározása

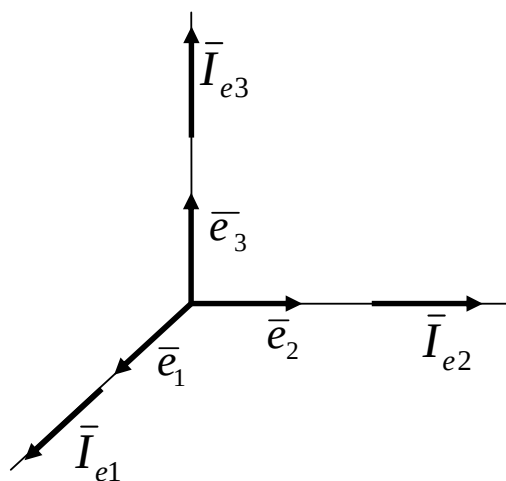
$$\bar{I}_e = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}$$

A másodrendű nyomaték tenzora mindig szimmetrikus. A harmadrendű szimmetrikus tenzornak három sajátérték és három sajátvektora van.

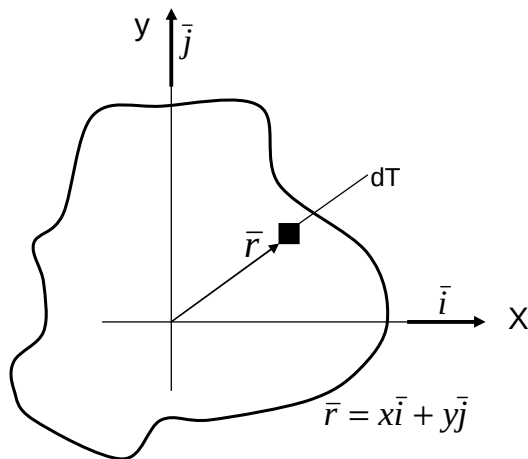
Fizikailag értelmezve a tenzor sajátértékei adják a főmásodrendű nyomatékokat, a sajátvektorok pedig a főirányokat.

A sajátvektorok koordinátarendszerében a tenzor $\bar{\bar{\mathbf{I}}} = \begin{bmatrix} I_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{e3} \end{bmatrix}$ alakú.

A sajátvektorok koordinátarendszerében a főmásodrendű nyomatékok vektora a főirányokba néz.



3.) Síkidomok másodrendű nyomatéka



Tekintsünk egy az xy síkban fekvő síkidomot.

A másodrendű nyomaték definíciója alapján az x valamint az y tengelyre számított másodrendű nyomaték vektorai

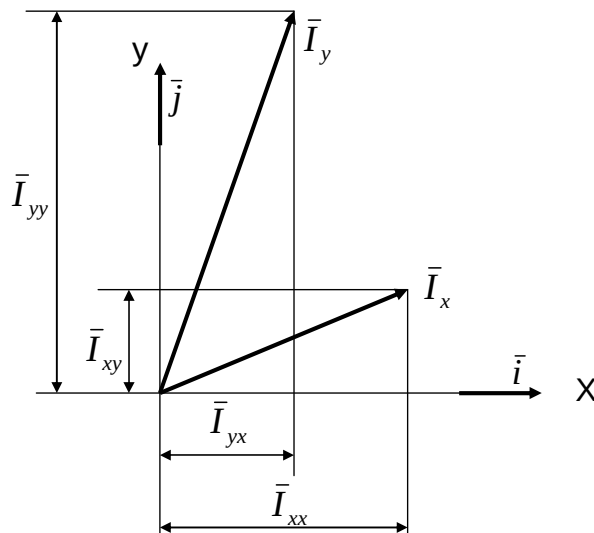
$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{i} \times \bar{r}) dT = \int_{(T)} \bar{i} (\bar{r} \cdot \bar{r}) - \int_{(T)} \bar{r} (\bar{i} \cdot \bar{r}) dT = \\ &= \int_{(T)} \bar{i} (x^2 + y^2) dT - \int_{(T)} (x\bar{i} + y\bar{j}) x dT = \\ &= \bar{i} \int_{(T)} y^2 dT - \bar{j} \int_{(T)} xy dT = \\ &= \bar{i} I_x - \bar{j} I_{xy}\end{aligned}$$

Illetve

$$\bar{I}_y = \int_{(T)} \bar{r} \times (\bar{j} \times \bar{r}) dT = -\bar{i} \int_{(T)} yx dT + \bar{j} \int_{(T)} x^2 dT = -\bar{i} I_{yx} + \bar{j} I_y$$

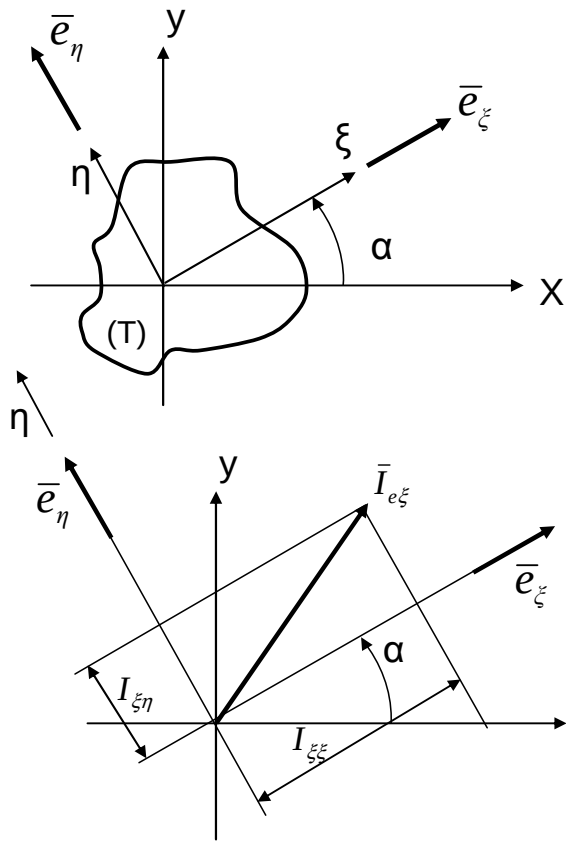
Ezekkel a másodrendű nyomaték tenzora

$$\bar{\bar{I}} = [\bar{I}_x, \bar{I}_y] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{(T)} y^2 dT & -\int_{(T)} xy dT \\ -\int_{(T)} yx dT & \int_{(T)} x^2 dT \end{bmatrix}$$



Az $I_x + I_y = I_p$ másodrendű nyomatékot a síkidom poláris másodrendű nyomatékának nevezzük.

4.) Koordinátarendszer forgatása



Tételezzük fel, hogy ismert a síkidom másodrendű nyomaték tenzora a derékszögű xy koordinátarendszerben.

Az α szöggel elforgatott $\xi\eta$ koordinátarendszerhez tartozó $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\xi\eta}$ másodrendű nyomaték tenzorának meghatározása az alábbiak szerint lehetséges.

$$\text{Legyen } \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Az $\bar{e}_\xi$ egységvektorhoz tartozó $\bar{I}_{e\xi}$ másodrendű nyomaték vektora az alábbi módon számítható.

$$\bar{I}_{e\xi} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \bar{e}_\xi = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

A másodrendű nyomaték vektornak ($\bar{I}_{e\xi}$) van vetülete a ξ és η tengelyekre. Ezek az alábbi skaláris szorzattal határozhatóak meg.

$$I_{\xi\xi} = \bar{e}_\xi \cdot \bar{I}_{e\xi} = \bar{e}_\xi \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \bar{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = [\text{skalár}]$$

$$I_{\eta\xi} = \bar{e}_\eta \cdot \bar{I}_{e\xi} = \bar{e}_\eta \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \bar{e}_\xi = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{yx} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = [\text{skalár}]$$

Az $\bar{e}_\eta$ egységvektorhoz tartozó $\bar{I}_{e\eta}$ illetve ennek vetületei hasonlóan határozhatók meg.

$$I_{\eta\eta} = \bar{e}_\eta \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \bar{e}_\eta$$

$$I_{\eta\xi} = \bar{e}_\xi \cdot \bar{\bar{\mathbf{I}}} \cdot \bar{e}_\eta$$

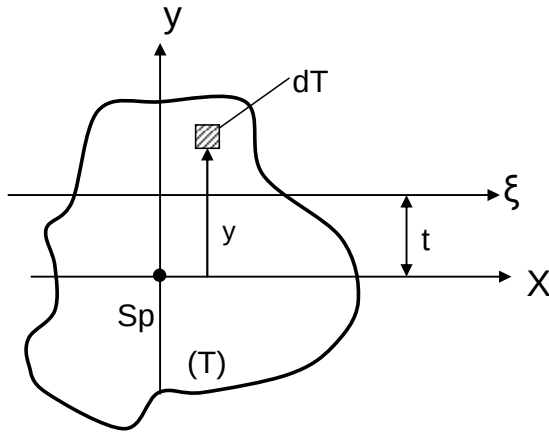
Természetesen itt is igaz, hogy $I_{\eta\xi} = I_{\xi\eta}$

Az előzőekben kiszámított értékekkel most már az új koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomaték tenzora az alábbi.

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} I_{\xi\xi} & I_{\xi\eta} \\ I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} \end{bmatrix}$$

5.) Koordinátarendszer párhuzamos eltolása

A számítások során legtöbbször a síkidom súlypontján átmenő tengelyre határozzuk meg a másodrendű nyomatékot.



A súlyponton átmenő x tengelyre és a vele párhuzamos ξ tengelyre számított másodrendű nyomatékok között a következő összefüggés vezethető le.

$$I_x = \int_{(T)} y^2 dT$$

$$\begin{aligned} I_{\xi} &= \int_{(T)} (y-t)^2 dT = \int_{(T)} (y^2 - 2yt + t^2) dT = \\ &= \int_{(T)} y^2 dT - 2t \int_{(T)} y dT + t^2 \int_{(T)} dT = \\ &= I_x + t^2 T \end{aligned}$$

Mivel a súlypontra számított elsőrendű nyomaték, az $\int_{(T)} y dT = 0$

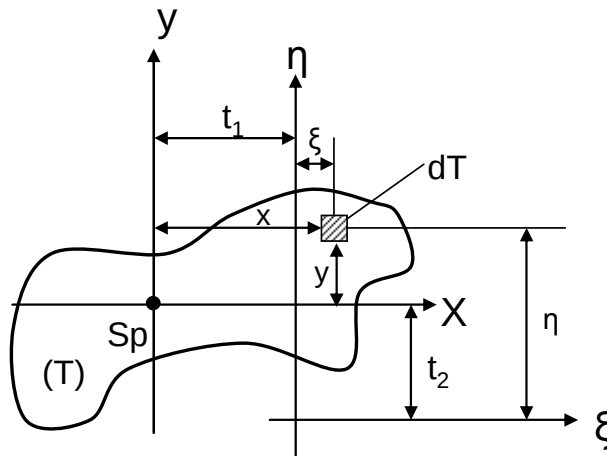
Ez azt is jelenti, hogy a síkidomnak a súlypontján átmenő tengelyre a legkisebb a tengelyre számított másodrendű nyomaték. Bármilyen, a súlyponti tengellyel párhuzamos tengelyre számított másodrendű nyomaték az úgynevezett Steiner taggal nagyobb.

Ha a súlyponti tengelyről térünk át más vele párhuzamos tengelyre, akkor növekszik a másodrendű nyomaték.

Ha viszont a külső tengelyről térünk át a súlyponti tengelyre, akkor csökken a másodrendű nyomaték.

Fontos felhívni a figyelmet arra, hogy két külső tengely között a Steiner tétel nem alkalmazható!

Hasonló összefüggés vezethető le a vegyes másodrendű nyomatékok esetén is.



$$I_{xy} = \int_{(T)} xy dT$$

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= \int_{(T)} \xi\eta dT = \int_{(T)} (x-t_1)(y+t_2) dT = \int_{(T)} (xy - yt_1 + xt_2 - t_1t_2) dT = \\ &= \int_{(T)} xy dT - t_1 \int_{(T)} y dT + t_2 \int_{(T)} x dT - t_1t_2 \int_{(T)} dT \end{aligned}$$

Mivel a súlypontra számított elsőrendű nyomatékok $\int_{(T)} y dT = 0$ és $\int_{(T)} x dT = 0$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - t_1 t_2 \cdot T = I_{xy} + (t_1)(-t_2) \cdot T$$

A Steiner tag előjele hasonló, mint az előzőekben. Ha a súlyponttól térünk kifelé, akkor pozitív.

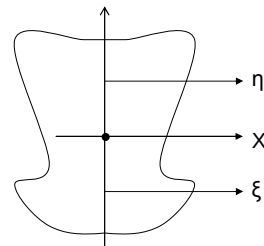
Figyelembe kell venni azonban az eltolás előjeles mértékét. Jelen ábrán az egyik eltolás pozitív (+ t_1) a másik negatív (- t_2).

Az eltolások előjelét mindig a konkrét feladathoz kell megállapítani.

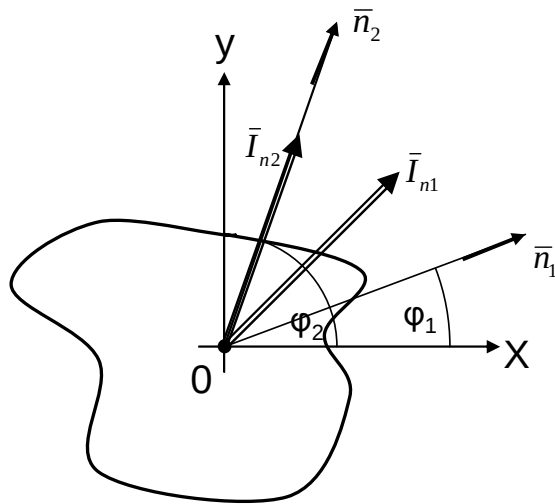
A centrifugális másodrendű nyomaték a definíció és a párhuzamos tengelykeresztek közötti kapcsolat alapján negatív, nulla és pozitív értéket is felvehet.

Ha a síkidomnak van szimmetriatengelye, akkor a szimmetriatengelyből és egy rá merőleges tengelyből álló tengelykeresztre a centrifugális másodrendű nyomaték zérus értékű

$$I_{xy} = 0 \quad I_{\eta y} = 0 \quad I_{\xi y} = 0$$



6.) Főmásodrendű nyomaték és főirány



Az xy tengelyekhez tartozó tenzor - $\bar{\bar{I}}_{xy}$ - ismeretében bármely, az x tengellyel φ szöget bezáró, $\bar{n}$ egységvektorhoz tartozó másodrendű nyomaték vektora meghatározható!

A másodrendű nyomaték iránya általában nem egyezik meg az egységvektor irányával.

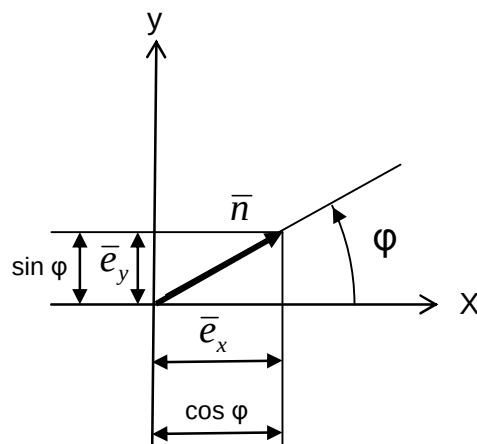
Létezik azonban két kitüntetett irány, amely-nél igaz, hogy $\bar{I}_n = \lambda \cdot \bar{n}$

illetve $\bar{\bar{I}}_{xy} \cdot \bar{n} = \lambda \cdot \bar{n}$

Rendezve az egyenletet $\bar{\bar{I}}_{xy} \cdot \bar{n} - \lambda \cdot \bar{n} = \vec{0}$

Bevezetve az $\bar{\bar{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ egységtenzort,

kapjuk $(\bar{\bar{I}}_{xy} - \lambda \bar{\bar{E}}) \cdot \bar{n} = \vec{0}$



$$\text{illetve} \begin{bmatrix} I_{xx} - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A homogén lineáris egyenletrendszernek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az úgynevezett karakterisztikus determináns zérus.

$$\det(\bar{\mathbf{I}}_{xy} - \lambda \bar{\mathbf{E}}) = 0 \text{ illetve } \det \begin{bmatrix} I_{xx} - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

A determinánst kifejtve egy másodfokú algebrai egyenletre jutunk, melynek gyökei – a tenzor sajátértékei – a síkidom „0” pontjához tartozó fő másodrendű nyomatékaik.

A fő másodrendű nyomatékhoz tartozó főirányokat – a tenzor sajátvektorai – az alábbi vektoregyenlet megoldásaként kapjuk.

$$(\bar{\mathbf{I}}_{xy} - \lambda_1 \bar{\mathbf{E}}) \cdot \bar{n}_1 = 0 \quad |\bar{n}_1| = 1$$

$$(\bar{\mathbf{I}}_{xy} - \lambda_2 \bar{\mathbf{E}}) \cdot \bar{n}_2 = 0 \quad |\bar{n}_2| = 1$$

A vektoregyenletek skaláris felírásában kétféleképpen járhatunk el, attól függően, hogy az egységvektor komponenseit hogyan adjuk meg.

$$\begin{bmatrix} I_{xx} - \lambda_1 & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{n} = e_x \bar{i} + e_y \bar{j}$$

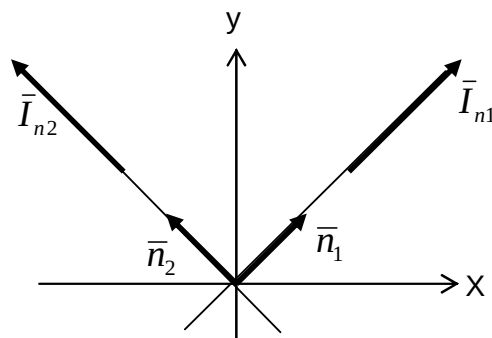
$$e_x^2 + e_y^2 = 1$$

Illetve

$$\begin{bmatrix} I_{xx} - \lambda_2 & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\bar{n} = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}$$



A főirányhoz tartozó másodrendű nyomaték vektorának nincs vetülete a főirányra merőleges tengelyre, vagyis a centrifugális másodrendű nyomaték zérus.

A főtengelyek koordinátarendszerében a másodrendű nyomaték tenzora az alábbi

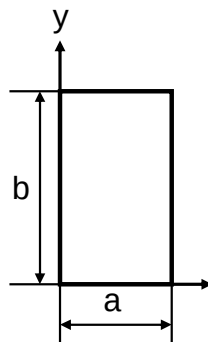
$$\bar{\mathbf{I}}_{n1,n2} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok által meghatározott tengelyek a síkidom főtengelyei. A súlyponthoz tartozó főtengelyeket centrális főtengelyeknek is nevezik.

A szimmetrikus idomoknál, ha a tengelykereszt valamelyik tengelye szimmetriatengely, akkor a centrifugális másodrendű nyomaték zérus értékű.

Ez azt jelenti, hogy a szimmetriatengely és a rá merőleges tengely egyben főtengely is.

7.) Néhány síkidom másodrendű nyomatéka

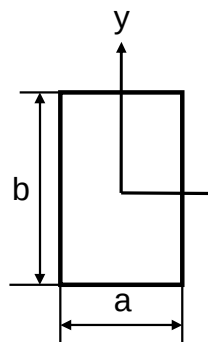


$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{3}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 \cdot b^2}{4}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{a \cdot b^3}{3} & -\frac{a^2 \cdot b^2}{4} \\ -\frac{a^2 \cdot b^2}{4} & \frac{b \cdot a^3}{3} \end{bmatrix}$$

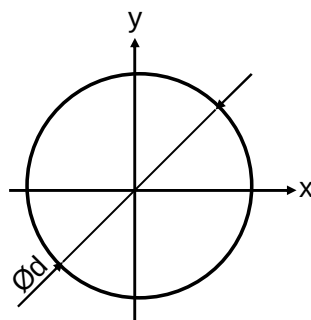


$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{a \cdot b^3}{12} & 0 \\ 0 & \frac{b \cdot a^3}{12} \end{bmatrix}$$

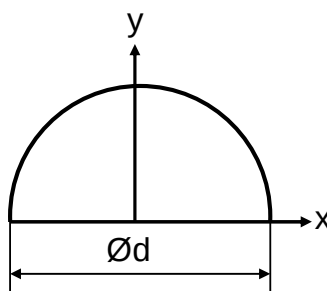


$$I_x = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$I_y = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{d^4 \pi}{64} & 0 \\ 0 & \frac{d^4 \pi}{64} \end{bmatrix}$$

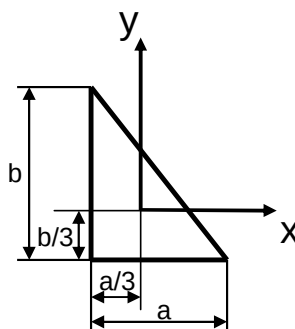


$$I_x = \frac{d^4 \pi}{128}$$

$$I_y = \frac{d^4 \pi}{128}$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{d^4 \pi}{128} & 0 \\ 0 & \frac{d^4 \pi}{128} \end{bmatrix}$$

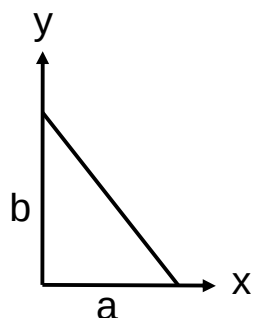


$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{36}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 \cdot b^2}{72}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{a \cdot b^3}{36} & -\frac{a^2 \cdot b^2}{72} \\ -\frac{a^2 \cdot b^2}{72} & \frac{b \cdot a^3}{36} \end{bmatrix}$$



$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

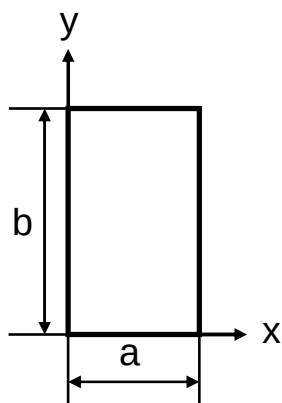
$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{a^2 \cdot b^2}{24}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{a \cdot b^3}{12} & -\frac{a^2 \cdot b^2}{24} \\ -\frac{a^2 \cdot b^2}{24} & \frac{b \cdot a^3}{12} \end{bmatrix}$$

8.) Példák a másodrendű nyomaték témakörből

1. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a kijelölt tengelyre! Írjuk fel a másodrendű nyomaték tenzorát!

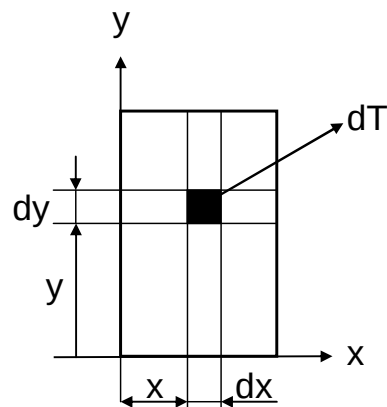
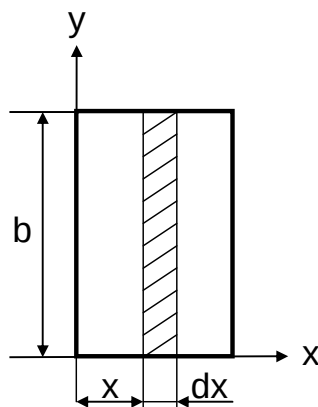
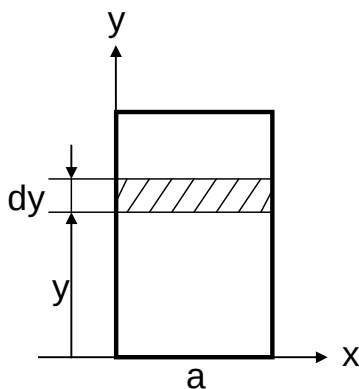
A definíció szerint

$$I_x = \int_{(T)} y^2 dT$$

$$I_y = \int_{(T)} x^2 dT$$

$$I_{xy} = \int_{(T)} xy dT$$

Az integrálok kiszámításánál tekintsük az alábbi ábrákat.



Az x tengelyre számított másodrendű nyomaték

$$I_x = \int_{(T)} y^2 dT = \int_0^b y^2 a dy = a \int_0^b y^2 dy = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

Az y tengelyre számított másodrendű nyomaték

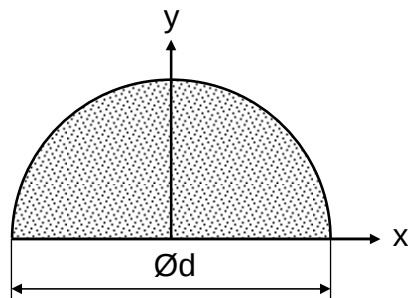
$$I_y = \int_{(T)} x^2 dT = \int_0^a x^2 b dx = b \int_0^a x^2 dx = b \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ba^3}{3}$$

A tengelykeresztre számított vegyes másodrendű nyomaték

$$I_{xy} = \int_{(T)} xy dT = \int_0^a \int_0^b xy dx dy = \int_0^a x \left(\int_0^b y dy \right) dx = \int_0^a x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^b dx = \frac{b^2}{2} \int_0^a x dx = \frac{b^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{a^2 b^2}{4}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{a \cdot b^3}{3} & -\frac{a^2 \cdot b^2}{4} \\ -\frac{a^2 \cdot b^2}{4} & \frac{b \cdot a^3}{3} \end{bmatrix}$$

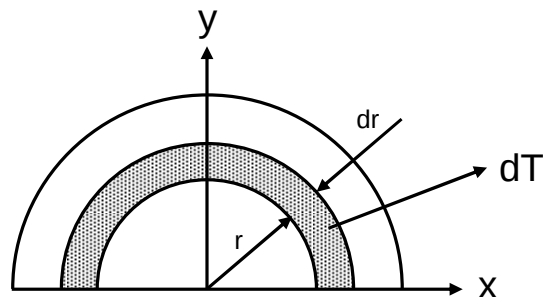
2. példa



Határozzuk meg a vázolt félkör másodrendű nyomatékát a kijelölt tengelyekre!

A félkör tengelyre számított másodrendű nyomatékának meghatározásához felhasználhatjuk a poláris másodrendű nyomaték definícióját, mely szerint

$$I_p = I_x + I_y = \int_{(T)} y^2 dT + \int_{(T)} x^2 dT = \int_{(T)} (x^2 + y^2) dT = \int_{(T)} r^2 dT$$



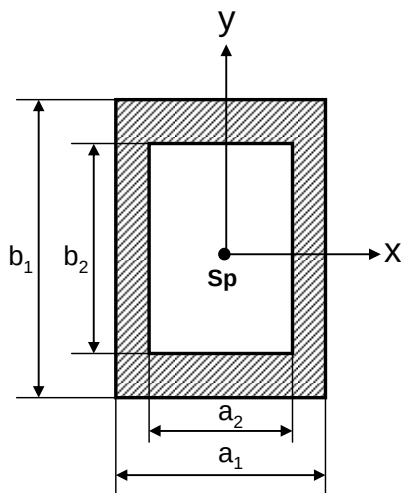
$$I_p = \int_{(T)} r^2 dT = \int_{(T)} r^2 (2r\pi/2) dr =$$

$$= \pi \int_{(T)} r^3 dr = \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{d/2} = \frac{d^4 \pi}{64}$$

Ebből

$$I_x = \frac{d^4 \pi}{128} \quad I_y = \frac{d^4 \pi}{128} \quad I_{xy} = 0$$

3. példa

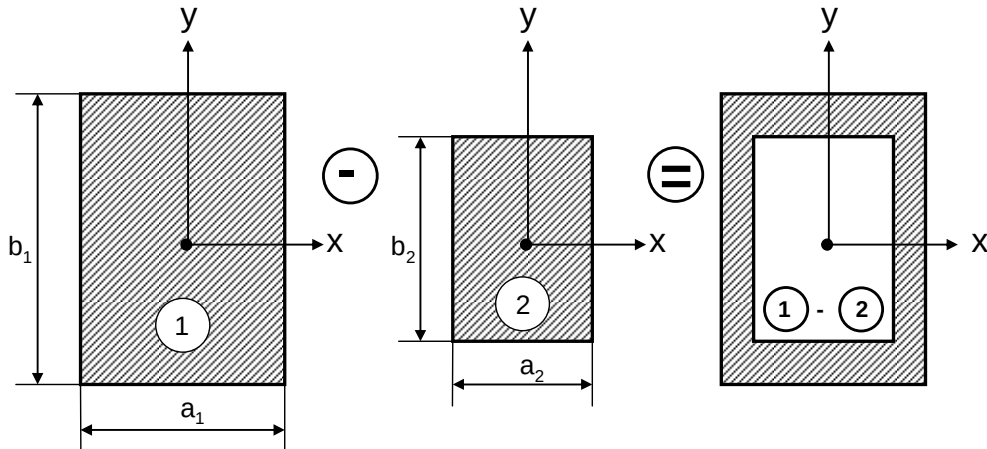


Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a kijelölt tengelyekre!

Írjuk fel az xy tengelykereszthez tartozó másodrendű nyomatékok tenzorát, ha:

$$\begin{array}{ll} a_1=6 & a_2=5 \\ b_1=12 & b_2=11 \end{array}$$

A feladat megoldásához osszuk két részre a síkidomot.



Meghatározzuk az 1-es és 2-es síkidom másodrendű nyomatékát

$$I_{x1} = \frac{a_1 b_1^3}{12} \quad I_{y1} = \frac{b_1 a_1^3}{12} \quad I_{xy1} = 0$$

illetve

$$I_{x2} = \frac{a_2 b_2^3}{12} \quad I_{y2} = \frac{b_2 a_2^3}{12} \quad I_{xy2} = 0$$

Felírhatjuk az eredeti síkidom másodrendű nyomatékát a két síkidom különbségeként.

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{a_1 b_1^3}{12} - \frac{a_2 b_2^3}{12} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} - \frac{5 \cdot 11^3}{12} = 309,42 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{y1} - I_{y2} = \frac{b_1 a_1^3}{12} - \frac{b_2 a_2^3}{12} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} - \frac{11 \cdot 5^3}{12} = 101,42 \text{ cm}^4$$

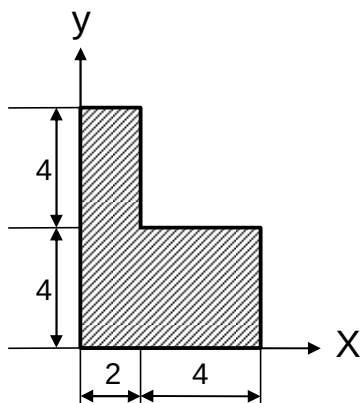
$$I_{xy} = I_{xy1} - I_{xy2} = 0$$

Ezzel a tenzort

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} 309,42 & 0 \\ 0 & 101,42 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

Mivel mindkét síkidom, mindkét tengelyre szimmetrikus, ezért a vegyes másodrendű nyomatékok zérus értékűek. A tengelyek egyben főtengelek is.

4. példa

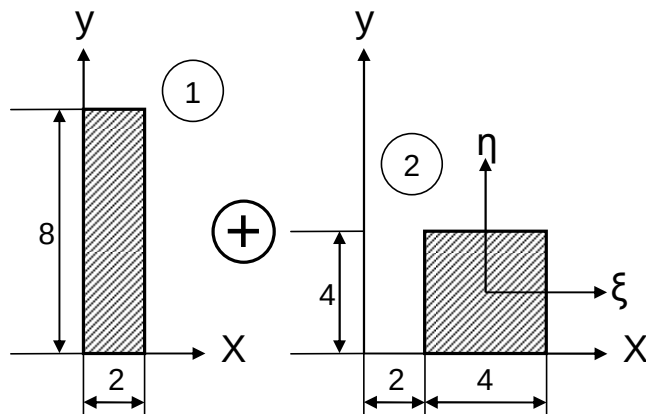


Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a kijelölt tengelyekre. Írjuk fel az $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy}$ tenzort!

A feladat megoldásánál kihasználjuk azt a lehetőséget, hogy tetszőleges alakú síkidom másodrendű nyomatékát meghatározhatjuk ismert másodrendű nyomatékú síkidomok nyomatékának összegeként. A részekre bontás tetszőleges lehet és egy feladaton belül is változhat.

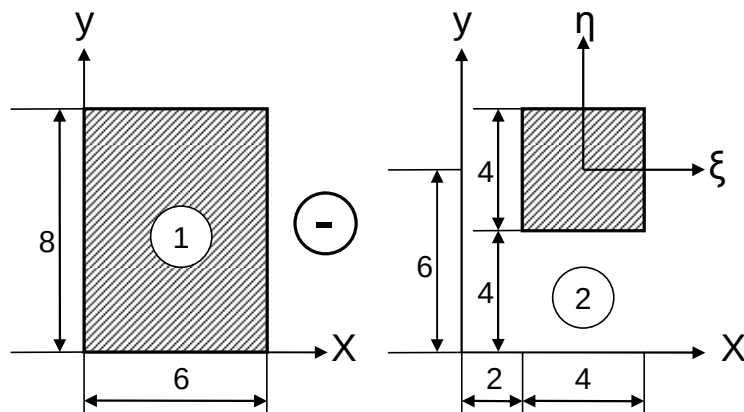
Az x tengelyre számított másodrendű nyomaték meghatározásánál a következő ábrán látható részekre szedtük szét

az alakzatot.



1. ábra

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \frac{2 \cdot 8^3}{3} + \left[\frac{4 \cdot 4^3}{3} \right] = 341,3 + 85,3 = 426,6 \text{ cm}^4$$

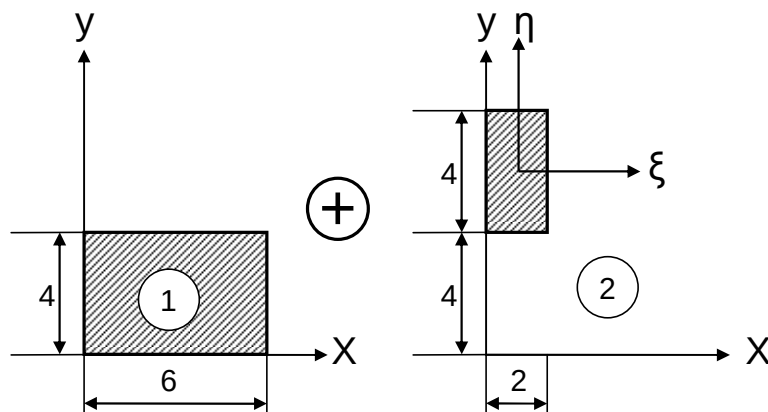


2. ábra

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{6 \cdot 8^3}{3} - \left[\frac{4 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 4 \cdot 6^2 \right] = 1024 - 597,3 = 426,6 \text{ cm}^4$$

Látható, hogy mindkét felbontás ugyanarra az eredményre vezet, de a második esetben a párhuzamos tengelyek közötti kapcsolatra vonatkozó összefüggést is alkalmaznunk kellett.

Az y tengelyre számított másodrendű nyomaték számításakor tekintsünk egy új felbontást



3. ábra

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = \frac{4 \cdot 6^3}{3} + \frac{4 \cdot 2^3}{3} = 288 + 10,6 = 298,6 \text{ cm}^4$$

Az I_y kiszámítása az 1. ábra felbontás alapján is kiszámítható.

$$I_y = I_{y1} + I_{y2} = \frac{8 \cdot 2^3}{3} + \left[\frac{4 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 4 \cdot 4^2 \right] = 21,3 + 277,3 = 298,6 \text{ cm}^4$$

I_y a 2. ábra szerint

$$I_y = I_{y1} - I_{y2} = \frac{8 \cdot 6^3}{3} - \left[\frac{4 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 4 \cdot 4^2 \right] = 576 - 277,3 = 298,6 \text{ cm}^4$$

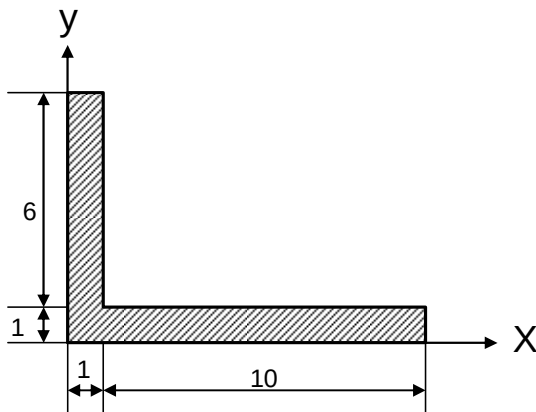
A vegyes másodrendű nyomatékot az első ábra alapján számíthatjuk.

$$I_{xy} = \frac{2^2 \cdot 8^2}{4} + [0 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2] = 64 + 128 = 192 \text{ cm}^4$$

Ezzel az $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy}$ tenzor

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} 426,6 & -192 \\ -192 & 298,6 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

5. feladat



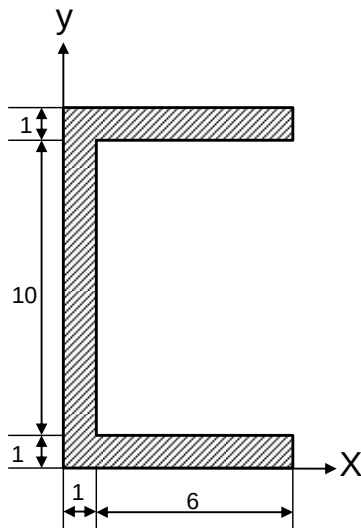
Határozzuk meg a vázolt L profil másodrendű nyomatékát a kijelölt koordinátarendszerben.

$$I_x = \frac{11 \cdot 7^3}{3} - \left(\frac{10 \cdot 6^3}{12} + 10 \cdot 6 \cdot 4^2 \right) = 117,6 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{7 \cdot 11^3}{3} - \left(\frac{6 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 6 \cdot 6^2 \right) = 445,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{7^2 \cdot 11^2}{4} - [0 + 6 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 4] = 42,25 \text{ cm}^4$$

6. feladat



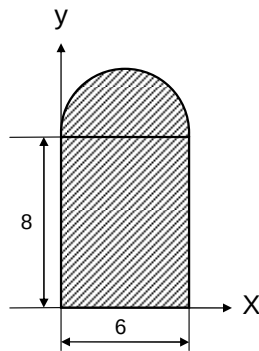
Határozzuk meg a vázolt U profil másodrendű nyomatékát a kijelölt koordinátarendszerben.

$$I_x = \frac{7 \cdot 12^3}{3} - \left[\frac{6 \cdot 10^3}{12} + 6 \cdot 10 \cdot 6^2 \right] = 1372 \text{ cm}^4$$

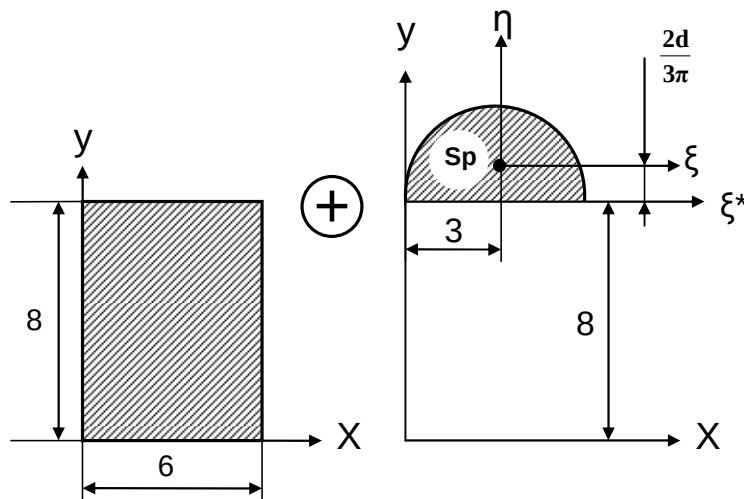
$$I_y = \frac{12 \cdot 7^3}{3} - \left(\frac{10 \cdot 6^3}{12} + 6 \cdot 10 \cdot 4^2 \right) = 232 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{7^2 \cdot 12^2}{4} - [0 + 6 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6] = 324 \text{ cm}^4$$

7. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a kijelölt koordináta-rendszerben!



A feladat megoldásánál használjuk fel, hogy a félkör másodrendű nyomatéka

$$I_{\xi^*} = \frac{d^4 \pi}{128} \quad \text{és} \quad I_{\eta} = \frac{d^4 \pi}{128} \quad \text{ahol } d \text{ a félkör átmérője.}$$

A félkör x tengelyre számított másodrendű nyomatékát az ismert I_{ξ^*} másodrendű nyomaték felhasználásával a következőképp számítjuk.

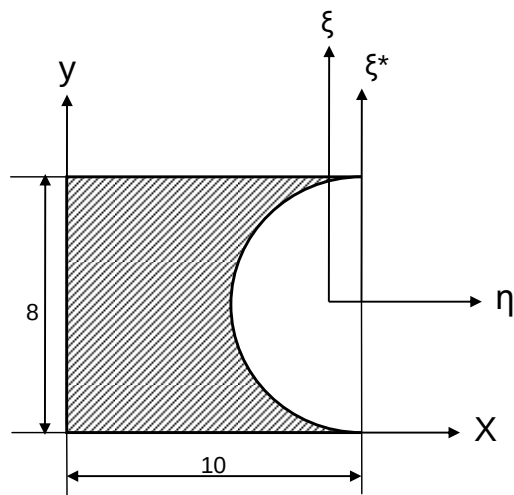
Mivel ξ^* tengely nem súlyponti tengely, ezért erről közvetlenül nem térhetünk át az x tengelyre. Első lépésként az ξ^* tengelyről áttérünk a ξ tengelyre (súlyponti tengelyre térünk át, tehát a Steiner tag negatív) majd a ξ tengelyről az x tengelyre (súlyponti tengelyről térünk át nem súlypontira, ezért a Steiner tag pozitív).

$$I_x = \frac{6 \cdot 8^3}{3} + \left[\frac{6^4 \pi}{128} - \frac{6^2 \pi}{8} \cdot \left(\frac{2 \cdot 6}{3\pi} \right)^2 + \frac{6^2 \pi}{8} \cdot \left(8 + \frac{2 \cdot 6}{3\pi} \right)^2 \right] = 2248,59 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 6^3}{3} + \left(\frac{6^4 \pi}{128} + \frac{6^2 \pi}{8} \cdot 3^2 \right) = 735,04 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{6^2 \cdot 8^2}{4} + \left[0 + \frac{6^2 \pi}{8} \cdot 3 \cdot \left(8 + \frac{2 \cdot 6}{3\pi} \right) \right] = 825,29 \text{ cm}^4$$

8. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a kijelölt koordináta-rendszerben és írja fel a $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy}$ tenzort!

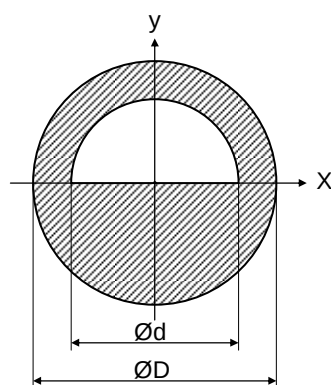
$$I_x = \frac{10 \cdot 8^3}{3} - \left[\frac{8^4 \pi}{128} + \frac{8^2 \pi}{8} \cdot 4^2 \right] = 777,35 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 10^3}{3} - \left[\frac{8^4 \pi}{128} - \frac{8^2 \pi}{8} \cdot \left(\frac{2 \cdot 8}{3\pi} \right)^2 + \frac{8^2 \pi}{8} \cdot \left(10 - \frac{2 \cdot 8}{3\pi} \right)^2 \right] = 876,43 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{8^2 \cdot 10^2}{4} - \left[0 + \frac{8^2 \pi}{8} \cdot 4 \cdot \left(10 - \frac{2 \cdot 8}{3\pi} \right) \right] = 765,36 \text{ cm}^4$$

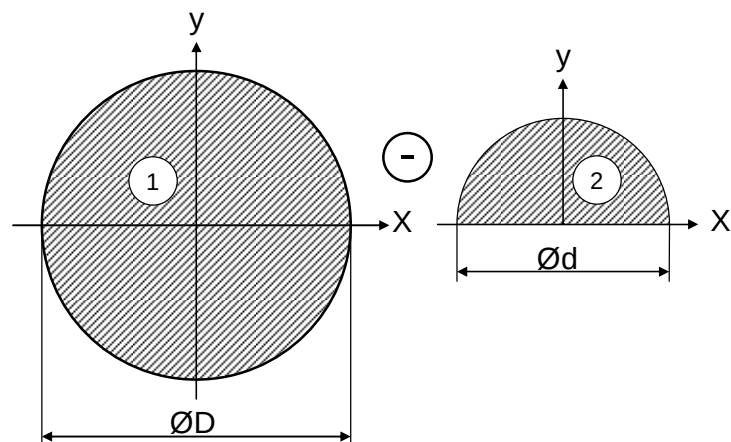
$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} 777,35 & -765,36 \\ -765,36 & 876,43 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

9. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a kijelölt tengelykeresztre.

A feladat megoldásánál abból indulhatunk ki, hogy a vázolt síkidom két könnyen kezelhető síkidom különbségeként adódik.



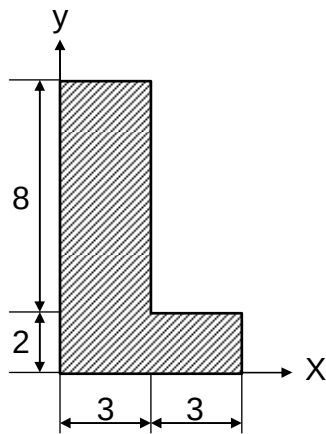
$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{D^4 \pi}{64} - \frac{d^4 \pi}{128} = \frac{(2D^4 - d^4) \pi}{128}$$

$$I_y = I_{y1} - I_{y2} = \frac{D^4 \pi}{64} - \frac{d^4 \pi}{128} = \frac{(2D^4 - d^4) \pi}{128}$$

$$I_{xy} = I_{xy1} - I_{xy2} = 0 - 0 = 0$$

Az x és y tengelyek egyúttal főtengek is.

10. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom origóhoz tartozó főtengetyét és főmásodrendű nyomatékát!

Számítsuk ki az xy tengelyhez tartozó másodrendű nyomatékokat.

$$I_x = \frac{3 \cdot 10^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^3}{3} = 1008 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{8 \cdot 3^3}{3} + \frac{2 \cdot 6^3}{3} = 216 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \frac{10^2 \cdot 3^2}{4} + [0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4,5] = 252 \text{ cm}^4$$

$$\text{Ezzel a tenzor } \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} 1008 & -252 \\ -252 & 216 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

A főmásodrendű nyomatékokat az alábbi egyenlet megoldásaként kapjuk.

$$\det \begin{bmatrix} 1008 - I & -252 \\ -252 & 216 - I \end{bmatrix} = 0 \text{ illetve } I^2 - 1224 \cdot I + 154224 = 0$$

Ennek megoldásai – a másodfokú egyenletmegoldó képlet alapján –

$$I_1 = 1081,38 > I_2 = 142,62$$

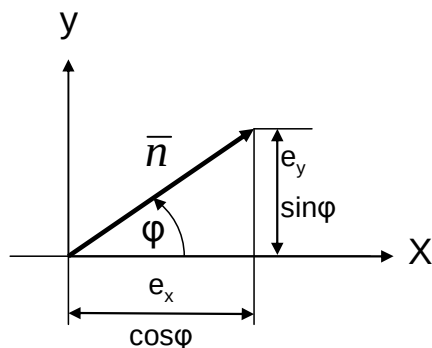
A főtengetyek koordináta-rendszerében a tenzor

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1081,38 & 0 \\ 0 & 142,62 \end{bmatrix}$$

A számítás helyességének ellenőrzésére felhasználhatjuk az a tényt, hogy az azonos ponthoz tartozó tenzorok főátlóbeli elemeinek összege (első skalár invariáns) nem változik, vagyis

$$1008 + 216 = 1081,38 + 142,62$$

A főmásodrendű nyomatékok (a tenzor saját értékei) ismeretében meghatározhatjuk a főtengetyek irányát. Erre két lehetőség kínálkozik attól függően, hogy az irányt kijelölő egységvektorokat hogyan definiáljuk.



$$|\bar{n}| = 1 \quad e_x^2 + e_y^2 = 1$$

$$\bar{n} = e_x \bar{i} + e_y \bar{j}$$

vagy

$$\bar{n} = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}$$

Az I_1 főmásodrendű nyomatékhoz tartozó főirányt (a tenzor I_1 sajátértékéhez tartozó $\bar{n}_1$ sajátvektort) az alábbi két mátrixegyenlet valamelyikének megoldásaként kapjuk.

$$\begin{bmatrix} (1008-1081,38) & -252 \\ -252 & (216-1081,38) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

illetve

$$\begin{bmatrix} -73,38 & -252 \\ -252 & -865,38 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A mátrixegyenlet átalakításával

$$-73,38 \cdot e_{1x} - 252 \cdot e_{1y} = 0$$

$$-252 \cdot e_{1x} - 865,38 \cdot e_{1y} = 0$$

Illetve

$$-73,38 \cdot \cos \varphi - 252 \cdot \sin \varphi = 0$$

$$-252 \cdot \cos \varphi - 865,38 \cdot \sin \varphi = 0$$

Bármelyik egyenletrendszer is tekintjük az egyenletek nem függetlenek egymástól, ugyanis ezen egyenletrendszerek önmagunkban nem elégségesek az ismeretlenek meghatározásához.

Kiegészítő egyenletként felírhatjuk, hogy a bevezetett vektor egységvektor, tehát

$$e_1^2 + e_2^2 = 1 \text{ illetve } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

A két egyenletrendszer közül a második megoldása egyszerűbb feladat, hiszen itt felhasználhatjuk az alábbi trigonometrikus összefüggést

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

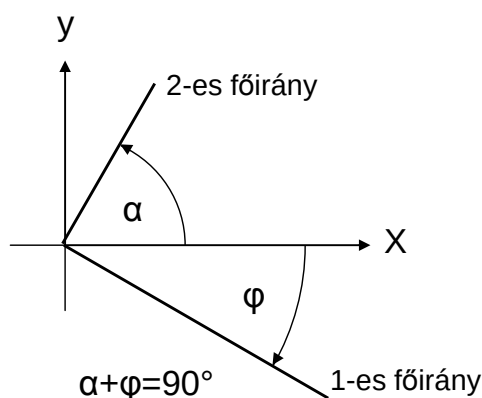
Ezzel a szög meghatározása

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-73,38}{252} = -0,2912 \text{ amiből } \varphi = -16,24^\circ$$

Az I_2 főmásodrendű nyomatékhoz tartozó főirány kiszámítását az alábbi módszerrel végezhetjük.

$$\begin{bmatrix} (1008-142,62) & -252 \\ -252 & (216-142,62) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ebből } \operatorname{tg} \alpha = \frac{865,38}{252} = 3,4341 \text{ illetve } \alpha = 73,76^\circ$$

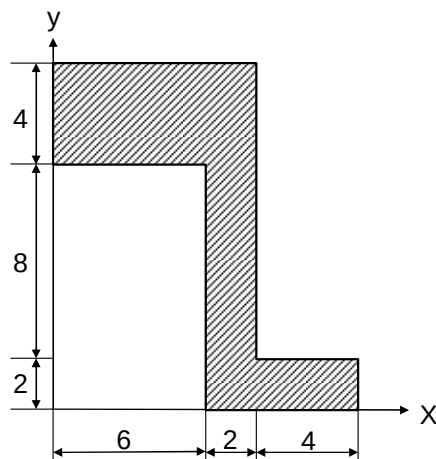


A két irányt felrajzolva látjuk, hogy a főirányok merőlegesek egymásra.

A kiszámított szögeket előjelhelyesen kell felrajzolni.

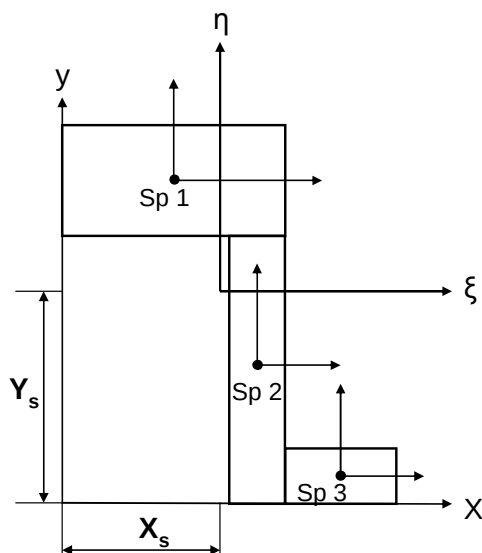
A pozitív irány az óramutató járásával ellentétes.

11. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom súlypontjához tartozó főmásodrendű nyomatékokat és főirányokat!

Első lépésként határozzuk meg a súlypont koordinátáját.



i_e	A_i [cm ²]	X_i [cm]	Y_i [cm]	$X_i A_i$	$Y_i A_i$
1.	32	4	12	128	384
2.	20	7	5	140	100
3.	8	10	1	80	8
Σ	60			348	492

A_i az egyes síkidomok területe

X_i az egyes síkidomok súlypontjának X koordinátája

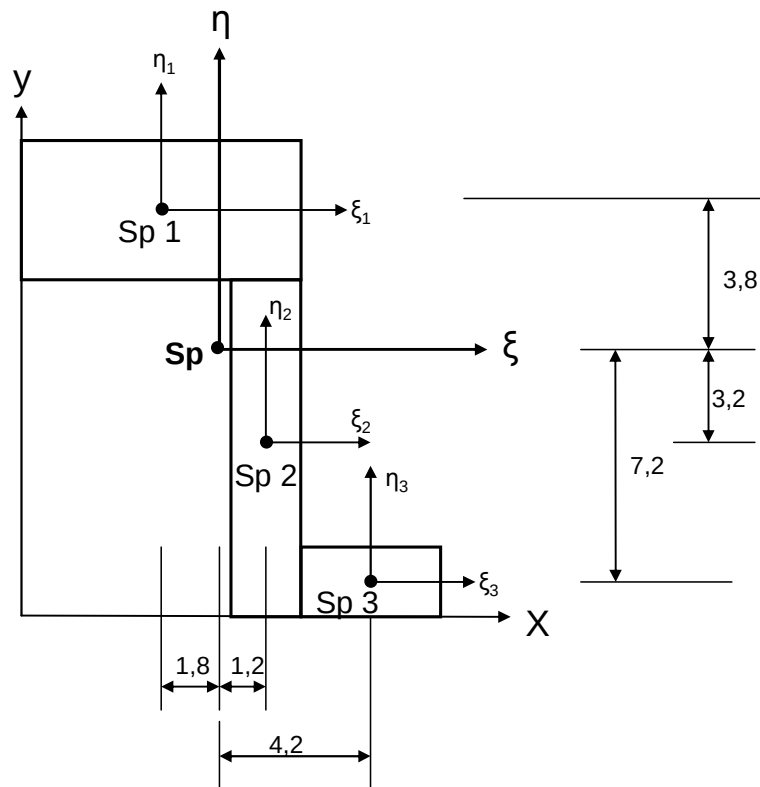
Y_i az egyes síkidomok súlypontjának Y koordinátája

Ezekkel
$$X_s = \frac{\sum X_i A_i}{\sum A_i} = \frac{348}{60} = 5,8 \text{ cm}$$

$$Y_s = \frac{\sum Y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{492}{60} = 8,2 \text{ cm}$$

A $\xi\eta$ koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomatékok kiszámításánál felhasználjuk a párhuzamos tengelyek közötti kapcsolatra bevezetett összefüggést, valamint azt a lehetőséget, hogy a síkidom másodrendű nyomatéka a rész síkidomok másodrendű nyomatékának az összege.

A számításhoz a következő ábrát használjuk.



Az I. jelű síkidom másodrendű nyomatéka a ξ tengelyre

$$I_{1\xi} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 8 \cdot 3,8^2 = 504,75 \text{ cm}^4$$

Ehhez hasonlóan írható fel a többi síkidom másodrendű nyomatéka

$$I_{2\xi} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 2 \cdot 10 \cdot 3,2^2 = 371,47 \text{ cm}^4$$

$$I_{3\xi} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} + 4 \cdot 2 \cdot 7,2^2 = 417,39 \text{ cm}^4$$

A teljes profil másodrendű nyomatéka a ξ tengelyre

$$I_{\xi} = I_{1\xi} + I_{2\xi} + I_{3\xi} = 1293,61 \text{ cm}^4$$

Az η tengelyre számított másodrendű nyomatékok

$$I_{1\eta} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} + 4 \cdot 8 \cdot 1,8^2 = 274,35 \text{ cm}^4$$

$$I_{2\eta} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 10 \cdot 2 \cdot 1,2^2 = 35,47 \text{ cm}^4$$

$$I_{3\eta} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 2 \cdot 4 \cdot 4,2^2 = 151,79 \text{ cm}^4$$

$$I_{\eta} = I_{1\eta} + I_{2\eta} + I_{3\eta} = 461,61 \text{ cm}^4$$

A $\xi\eta$ tengelykeresztre számított vegyes másodrendű nyomatékok

$$I_{1\xi\eta} = 0 + 8 \cdot 4 \cdot 3,2 \cdot (-1,8) = -218,88 \text{ cm}^4$$

$$I_{2\xi\eta} = 0 + 10 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot (-3,2) = -76,80 \text{ cm}^4$$

$$I_{3\xi\eta} = 0 + 4 \cdot 2 \cdot 4,2 \cdot (-7,2) = -241,92 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = I_{1\xi\eta} + I_{2\xi\eta} + I_{3\xi\eta} = -537,60 \text{ cm}^4$$

A súlyponti $\xi\eta$ tengelypárhoz tartozó másodrendű nyomaték tenzora

$$\bar{\mathbf{I}}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 1293,61 & 537,6 \\ 537,6 & 461,61 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

A súlyponti főmásodrendű nyomaték meghatározásához oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet!

$$\det \begin{bmatrix} 1293,61 - I & 537,6 \\ 537,6 & 461,61 - I \end{bmatrix} = 0 \text{ illetve } I^2 - 1755,22 \cdot I + 308129,55 = 0$$

A főmásodrendű nyomatékok

$$I_1 = 1557,37 \text{ cm}^4 \quad \text{és} \quad I_2 = 197,85 \text{ cm}^4$$

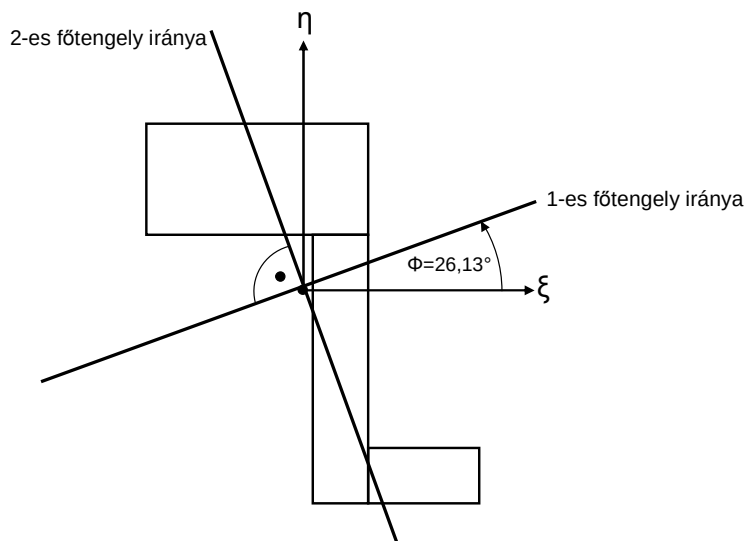
Az I_1 főmásodrendű nyomatékhoz tartozó főirányt meghatározó φ szög értékét a következő egyenletekből határozhatjuk meg.

$$\begin{bmatrix} (1293,61 - 1557,37) & 537,60 \\ 537,60 & (461,61 - 1557,37) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

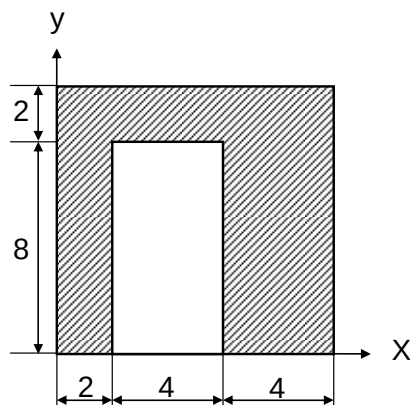
$$\tan \varphi = \frac{263,76}{537,60} = 0,4906 \text{ illetve } \varphi = 26,13^\circ$$

Az I_2 főmásodrendű nyomatékhoz tartozó főirány is számolható hasonló módon.

A korábbi levezetések azonban már igazolták, hogy a két főirány merőleges egymásra. Ennek ismeretében rajzoltuk be az ábrába a 2-es főtengelyt.

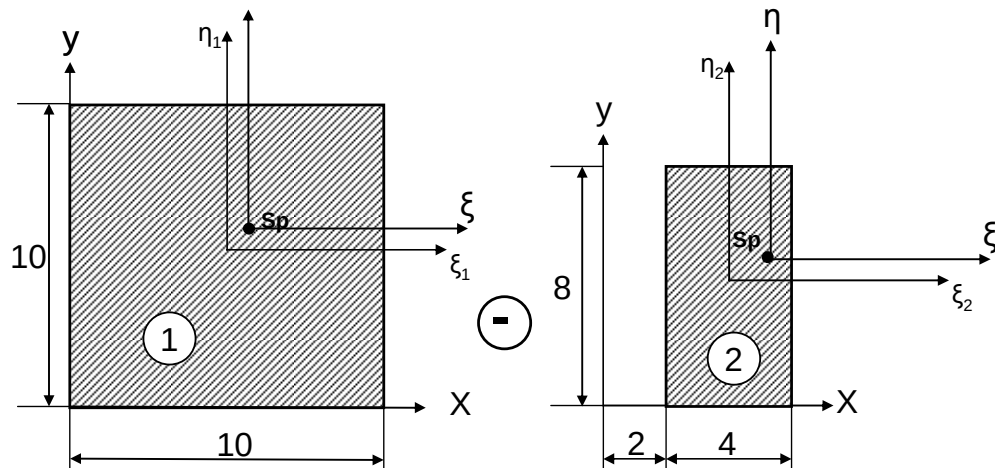


12. példa



Határozzuk meg a súlyponti főtengelyek helyzetét és főmásodrendű nyomatékait

A súlypont helyzetét az alábbi ábra alapján egy táblázat segítségével határozhatjuk meg.



i_e	A_i [cm ²]	X_i [cm]	Y_i [cm]	$X_i A_i$	$Y_i A_i$
1.	100	5	5	500	500
2.	-32	4	4	-128	-128
Σ	68			372	372

$$X_s = \frac{\sum X_i A_i}{\sum A_i} = \frac{372}{68} = 5,47 \text{ cm}$$

$$Y_s = \frac{\sum Y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{372}{68} = 5,47 \text{ cm}$$

A $\xi\eta$ tengelykereszthez tartozó másodrendű nyomatékok értékei az alábbiak

$$I_{1\xi} = \frac{10 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 10 \cdot 0,47^2 = 855,42 \text{ cm}^4$$

$$I_{2\xi} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} + 4 \cdot 8 \cdot 1,47^2 = 239,82 \text{ cm}^4$$

$$I_\xi = I_{1\xi} - I_{2\xi} = 615,60 \text{ cm}^4$$

illetve

$$I_{1\eta} = \frac{10 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 10 \cdot 0,47^2 = 855,42 \text{ cm}^4$$

$$I_{2\eta} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} + 8 \cdot 4 \cdot 1,47^2 = 111,82 \text{ cm}^4$$

$$I_\eta = I_{1\eta} - I_{2\eta} = 743,60 \text{ cm}^4$$

és

$$I_{1\xi\eta} = 0 + 10 \cdot 10 \cdot 0,47 \cdot 0,47 = 22,09 \text{ cm}^4$$

$$I_{2\xi\eta} = 0 + 8 \cdot 4 \cdot 1,47 \cdot 1,47 = 69,15 \text{ cm}^4$$

$$I_{\xi\eta} = I_{1\xi\eta} - I_{2\xi\eta} = -47,06 \text{ cm}^4$$

A $\xi\eta$ koordinátarendszerhez tartozó másodrendű nyomaték tenzora

$$\bar{\mathbf{I}}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 615,60 & 47,06 \\ 47,06 & 743,60 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

A főmásodrendű nyomatékok meghatározásához oldjuk meg az alábbi másodfokú egyenletet

$$I^2 - 1359,27 \cdot I + 455494,4 = 0$$

$$I_1 = 759,36 \text{ cm}^4 \quad \text{és} \quad I_2 = 599,84 \text{ cm}^4$$

A főirányokat az alábbi egyenlet segítségével határozhatjuk meg

$$-143,76 \cos \varphi + 47,06 \sin \varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{143,76}{47,06} = 3,055$$

$$\varphi = 71,87^\circ$$

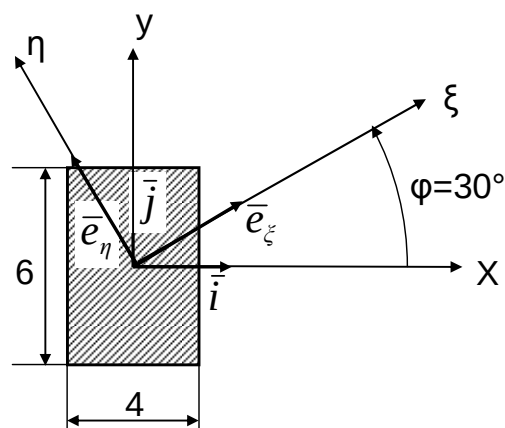
illetve

$$15,76 \cos \alpha + 47,06 \sin \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-15,76}{47,06} = -0,335$$

$$\alpha = -18,13^\circ$$

13. példa



Határozzuk meg a vázolt síkidom másodrendű nyomatékát a $\xi\eta$ tengelykeresztre!

A síkidom másodrendű nyomatékát az xy koordináta-rendszerben könnyen számítható.

$$I_x = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0 \text{ cm}^4$$

Az xy koordináta tengelyekhez tartozó $\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy}$ tenzor az alábbi

$$\bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} = \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

$$\text{A } \xi \text{ tengely egységvektora } \bar{e}_\xi = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j} = [\cos \varphi, \sin \varphi] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

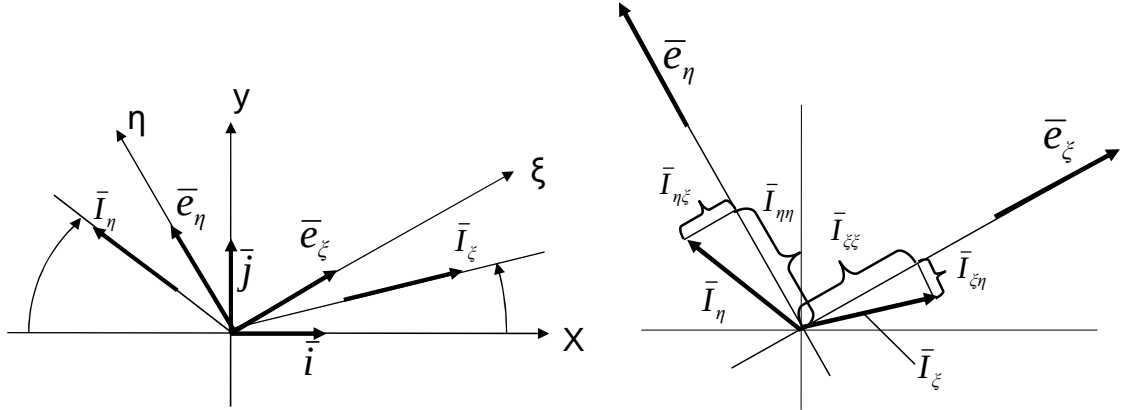
$$\text{A } \eta \text{ tengely egységvektora } \bar{e}_\eta = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j} = [-\sin \varphi, \cos \varphi] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Az $\bar{I}_\xi$ másodrendű nyomatékvektort (az $\bar{e}_\xi$ egységvektorhoz tartozó másodrendű nyomatékvektort) a következőképpen kapjuk

$$\bar{I}_\xi = \bar{\bar{\mathbf{I}}}_{xy} \cdot \bar{e}_\xi = \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36\sqrt{3} \\ 16 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{I}_\xi &= 36\sqrt{3} \cdot \bar{i} + 16 \cdot \bar{j} \\ &= 62,35 \cdot \bar{i} + 16 \cdot \bar{j} \end{aligned}$$

Az $\bar{I}_\eta$ másodrendű nyomatékvektor az alábbi

$$\bar{I}_\eta = \bar{\mathbf{I}}_{xy} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\eta = \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 16\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \bar{I}_\eta &= -36 \cdot \bar{i} + 16\sqrt{3} \cdot \bar{j} \\ &= -36 \cdot \bar{i} + 27,71 \cdot \bar{j} \end{aligned}$$



Határozzuk meg az $\bar{I}_\xi$ másodrendű nyomatékvektor vetületeit a ξ és η tengelyre!

$$\begin{aligned} I_{\xi\xi} &= \bar{\mathbf{e}}_\xi \cdot \bar{I}_\xi = \bar{\mathbf{e}}_\xi \cdot \bar{\mathbf{I}}_{xy} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\xi = [\cos \varphi, \sin \varphi] \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36\sqrt{3} \\ 16 \end{bmatrix} = 62 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= \bar{\mathbf{e}}_\eta \cdot \bar{I}_\xi = \bar{\mathbf{e}}_\eta \cdot \bar{\mathbf{I}}_{xy} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\xi = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \begin{bmatrix} 36\sqrt{3} \\ 16 \end{bmatrix} = -18\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = -10\sqrt{3} \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $\bar{I}_\eta$ másodrendű nyomatékvektor vetületeit a ξ és η tengelyre!

$$\begin{aligned} I_{\eta\xi} &= \bar{\mathbf{e}}_\xi \cdot \bar{I}_\eta = \bar{\mathbf{e}}_\xi \cdot \bar{\mathbf{I}}_{xy} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\eta = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -36 \\ 16\sqrt{3} \end{bmatrix} = -18\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = -10\sqrt{3} \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\bar{I}_{\eta\eta} = \bar{\mathbf{e}}_\eta \cdot \bar{I}_\eta = \bar{\mathbf{e}}_\eta \cdot \bar{\mathbf{I}}_{xy} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\eta = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \begin{bmatrix} 72 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \begin{bmatrix} -36 \\ 16\sqrt{3} \end{bmatrix} = 42 \text{ cm}^4$$

$$\text{Ezzel } \bar{\mathbf{I}}_{\xi\eta} = \begin{bmatrix} 62 & -10\sqrt{3} \\ -10\sqrt{3} & 42 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

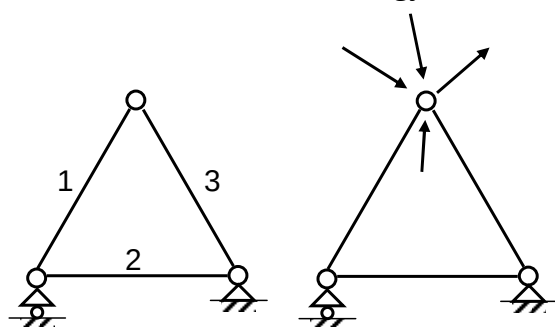
VI.) Rácsos szerkezetek

1.) Síkbeli rácsos szerkezet értelmezése

Síkbeli csuklós szerkezeteknek nevezzük azokat a rúdszerkezeteket, amelyeknek valamennyi eleme (rúdja) egy közös síkban helyezkedik el, a rudak csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz és a terhelés is a szerkezet síkjában fekszik.

Az olyan szerkezeteket, amelyeknél a külső erők csak a csuklókra hatnak egyszerű rácsos szerkezeteknek nevezzük.

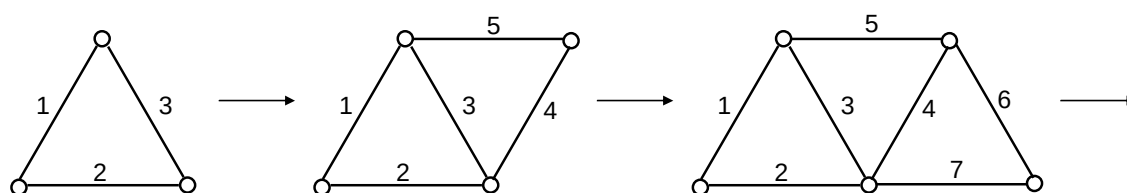
A legegyszerűbb síkbeli rácsos szerkezetet akkor kapjuk, amikor három rudat úgy kapcsolunk össze síkcsuklókkal, hogy azok háromszöget alkotnak.



Ha ezt a szerkezetet statikailag határozott módon kényszerek segítségével megtámasztjuk, akkor a fennmaradó csuklóban ható bármilyen irányú erő hatására a szerkezet stabil marad.

A célnak megfelelő rácsos szerkezetet – a három rudas alapszerkezetből – a következő módszerrel tudunk létrehozni:

Az alapszerkezet két csuklópontjához hozzákötünk egy-egy rudat, majd az új rudak végét síkcsuklóval kapcsoljuk össze. Ezt a folyamatot ismételve bármilyen szerkezet kialakítható.



Az ezen elvek alapján kialakított rácsos szerkezet belsőleg statikailag határozott. A statikai határozottság feltétele (ha a szerkezetet statikailag határozott módon támasszuk meg):

$$2c = r + 3 \text{ vagy } r = 2c - 3$$

Ahol c : csuklók száma

r : rudak száma

$c = 4$ $r = 6$	$c = 4$ $r = 5$	$c = 4$ $r = 4$
$6 > 2 \cdot 4 - 3$	$5 = 2 \cdot 4 - 3$	$4 < 2 \cdot 4 - 3$
$r > 2c - 3$	$r = 2c - 3$	$r < 2c - 3$
statikailag határozatlan	statikailag határozott	statikailag határozott

Rácsos szerkezetnél az ismeretlen erők (kényszererők, rúderők) meghatározásánál – a számítások könnyebbé tétele érdekében – a következő egyszerűsítő feltételezéseket alkalmazzuk:

1. A rácsrudak és síkcsuklók végetlen merevek, alakjukat nem változtatják
2. Az egy csuklóba befutó rudak középvonalai a csukló középpontjában metszik egymást.
3. A csuklók és rudak kapcsolatát súrlódásmentesnek tételezzük fel.
4. A rácsos szerkezet csak csuklóin kap terhelést, tehát a rudak terheetlenek. Ennek következtében a rudakban csak rúdirányú erők keletkeznek (húzás vagy nyomás).

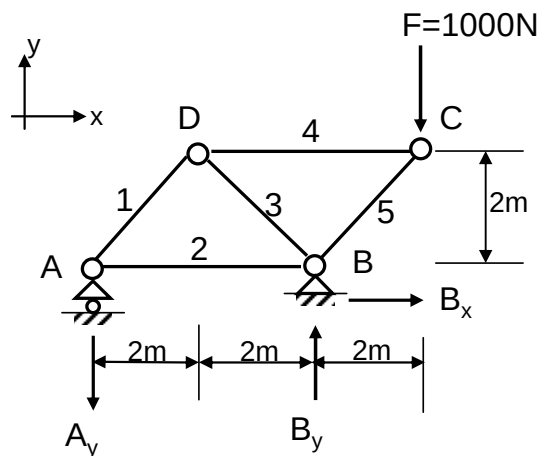
2.) Rúderők meghatározása csomóponti módszerrel

A csomóponti módszer az egyes csuklóknak, mint csomópontoknak az egyensúlyából indul ki. Ez azt jelenti, hogy a síkcsukló a ráható külső erők valamint a hozzá kapcsolódó rudakból származó erők hatására egyensúlyban van.

Az egy csuklón támadó erők közös támadáspontú síkbeli erőrendszert alkotnak. Ezeknél a felírható egyensúlyi egyenletek száma kettő. Az ismeretlenek száma pedig a csomóponthoz kapcsolódó rudak számával egyezik. (Mivel ismerjük az erő hatásvonalát csak a nagysága kérdéses.) Ha követjük a statikailag határozott rácsos tartó felépítésének módszerét, mindig lesz olyan csomópont, ahol csak két ismeretlen rúderő lesz.

Amennyiben ismerjük valamely rúd egyik végén ébredő erőt, akkor a hatás-ellenhatás elve alapján már ismerjük a rúd másik végén ható erőt is.

A rúderők meghatározása történhet számítással vagy szerkesztéssel.



Első lépésként határozzuk meg az A és B csomópontban ébredő kényszererőket.

$$\sum M_B = 0$$

$$A_y \cdot 4 - 1000 \cdot 2 = 0$$

$$A_y = 500 \text{ N}$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$-500 + B_y - 1000 = 0$$

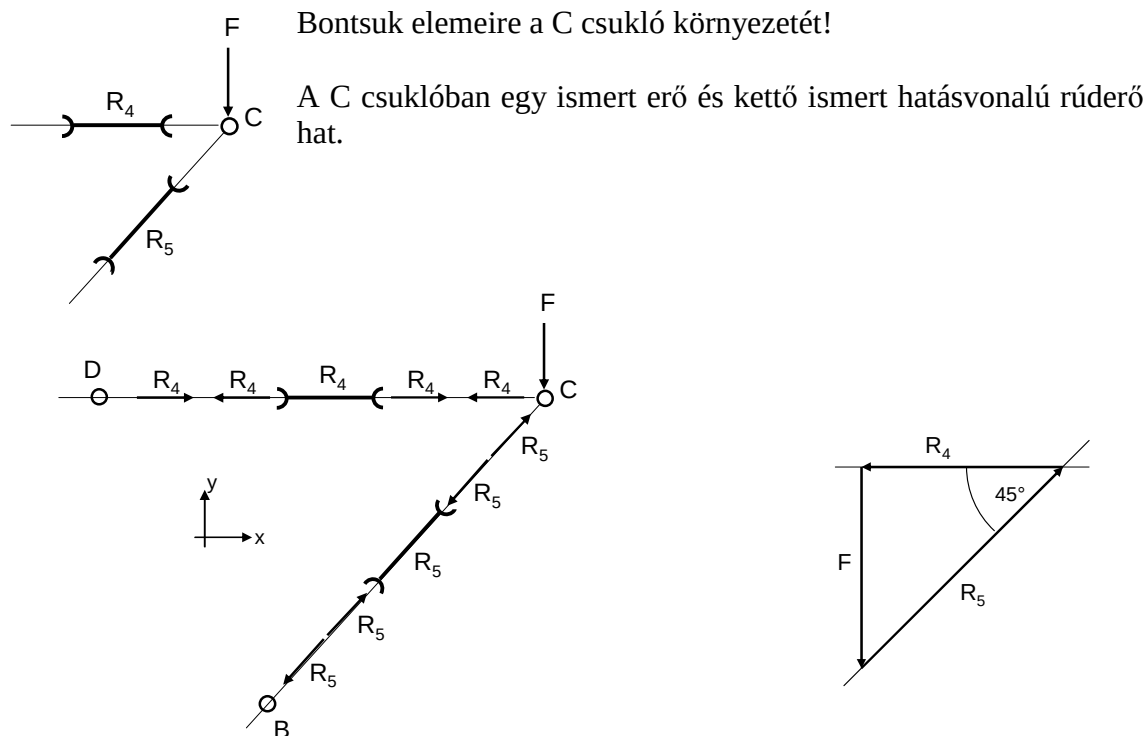
$$B_y = 1500 \text{ N}$$

$$\sum X_i = 0$$

$$B_x = 0$$

A kényszererők ismeretében megállapítható, hogy mind az A mind a C csomópont alkalmas arra, hogy a számítást elindítsuk.

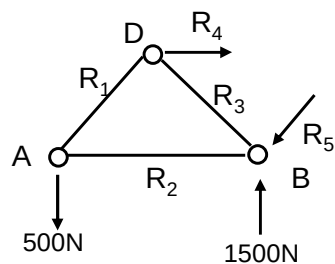
Ezekben a pontokban csak 2-2 ismeretlen rúderejű rúd csatlakozik.



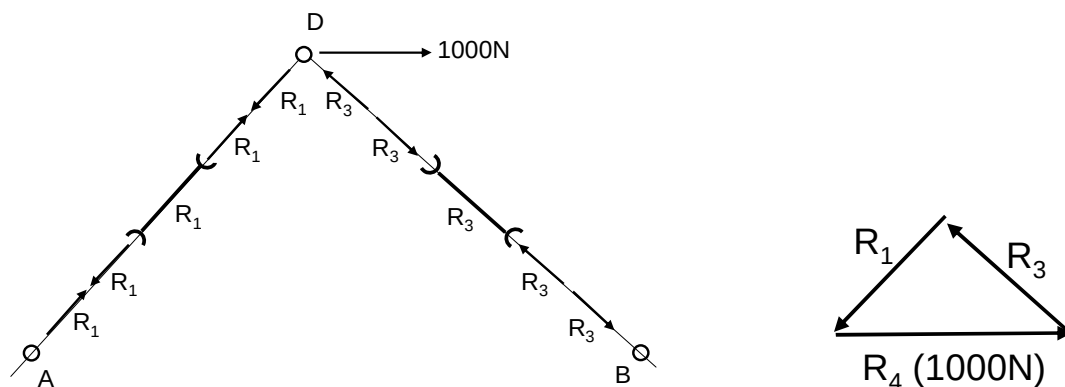
A C csukló egyensúlyát biztosító erőket az ábrán látható vektorháromszög segítségével határozhatjuk meg. A vektorháromszög folytonos nyílfolyamú, ami azt jelenti, hogy az erők összege zérus.

Ugyancsak az előző ábrán berajzoltuk a C csuklót terhelő erőket, valamint a hatásellenhatás elvének megfelelően a kapcsolódó rudak erőjátékát is megadtuk.

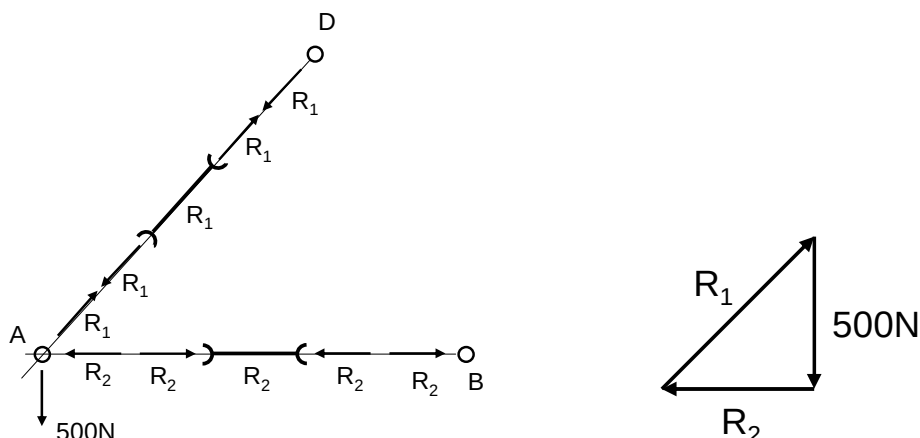
Ennek értelmében a 4-es számú rúd 1000 N nagyságú erővel húzott, az 5-ös számú pedig $1000\sqrt{2}\text{ N}$ erővel nyomott igénybevételű.



Az ábrán felrajzoltuk a még ismeretlen rúderejű rudakból álló szerkezetet valamint a csomópontban működő erőket. Az ábra alapján megállapítható, hogy bármely csomópontot is választjuk kiindulásnak mindig csak két rúd rúdereje az ismeretlen. Rajzoljunk meg a D és A csomópontok erőjátékát.



Az előző ábra alapján az R_1 rúdban $500\sqrt{2}$ N nagyságú húzó igénybevétel az R_3 rúdban $500\sqrt{2}$ N nagyságú nyomó igénybevétel ébred.



Az előző ábrán az R_1 rúdban ébredő igénybevétel az A csukló egyensúlyából állapítottuk meg. Amint látható a rúd igénybevétele ugyanolyan, mint az előző esetben.

Az alábbi táblázat mutatja a szerkezet kiszámított rúderőit.

rúdszám	rúderő
1	$+500\sqrt{2}$ N
2	-500 N
3	$-500\sqrt{2}$ N
4	$+1000$ N
5	$-1000\sqrt{2}$ N

rúderők előjelének jelentése:

+ húzott
- nyomott rúd

A csomópontok egyensúlyát vizsgálva, a hálózatban találhatunk olyan rudakat is, melyekben zérus nagyságú rúderő ébred. Ezeket a rudakat vakrudaknak nevezzük és a rúdra rajzolt körrel jelöljük.

A számítandó szerkezeten ránézésre is kiszűrhetők azok a rudak, amelyekben zérus nagyságú az igénybevétel.

Terheletlen csomópontoknál az alábbi esetekben kapunk vakrudakat:

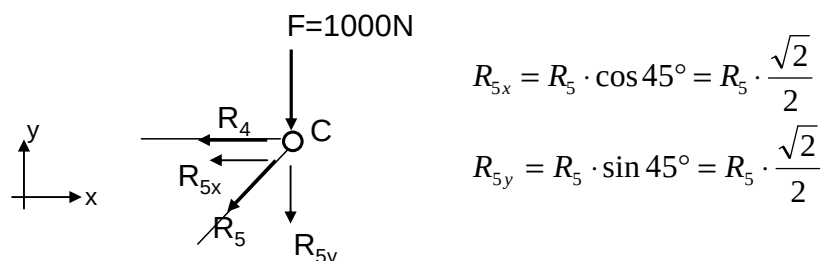
- a) Ha két rúd szögben találkozik ($\alpha < 180^\circ$) és a csomópont terheletlen, akkor mindkét rúd vakrúd.
- b) Ha három rúd úgy találkozik, hogy kettő hatásvonala egybe esik és a csomópont a terheletlen, akkor a harmadik rúd vakrúd.

Terhelt csomópontoknál csak speciális terhelés mellett kapunk vakrudakat

- Ha a terhelés beleesik valamely rúd hatásvonalaiba, akkor a csomópont terhelését ez a rúd veszi fel, míg a másik rúd vakrúd.

Az előbbi főleg szerkesztésen alapuló módszer helyett választhatjuk a számításos módszert is. Itt is csomópontról csomópontra haladunk.

Vizsgáljuk meg a C csukló egyensúlyát



Síkbeli erők akkor vannak egyensúlyban, ha az alábbi egyenletek teljesülnek

$$\sum M = 0 \quad \sum X_i = 0 \quad \sum Y_i = 0$$

A $\sum M = 0$ automatikusan teljesül, hiszen három erő egy közös metszésponton halad át, így erre a pontra a nyomatékuk összege zérus.

Írjuk fel a másik két egyenletet

$$\sum X_i = 0 \quad -R_4 - R_{5x} = 0 \rightarrow -R_4 - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -F - R_{5y} = 0 \rightarrow -F - R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Ezekből

$$R_5 = -\frac{2F}{\sqrt{2}} = -F\sqrt{2}$$

$$R_4 = -R_5 \frac{\sqrt{2}}{2} = -(-F\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = F$$

Ezen eredménynek szerint az R_4 rúdban 1000N húzóerő az R_5 rúdban $1000\sqrt{2}$ N nyomóerő ébred.

Ez megfelel az előző számításunknak.

A módszer tovább folytatható a következő csomópontoknál. Mindig felírjuk az egyensúlyi egyenleteket, melyekből az ismeretlen rúderők számíthatók.

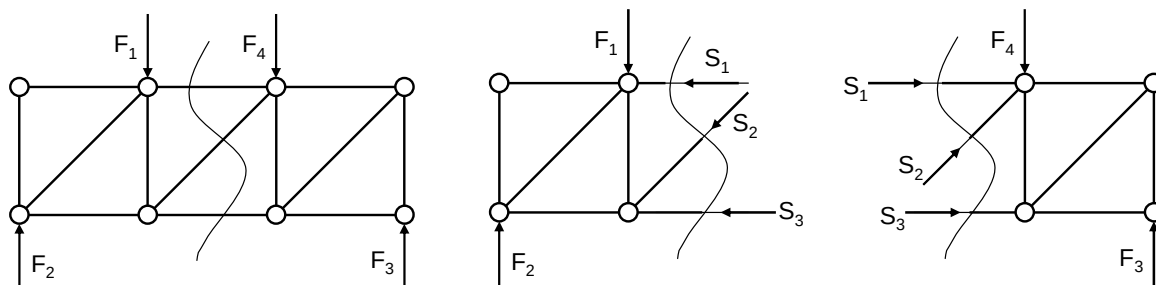
A két módszer bármelyikét használhatjuk, az eredmény nem változik.

A számításos módszer egyenleteinek felírása egyes esetekben több munkát igényel, mert az erők komponensre bontásához szükséges szögeket a geometriai adatokból kell kiszámolni.

3.) Háromrudas átmetsző módszer

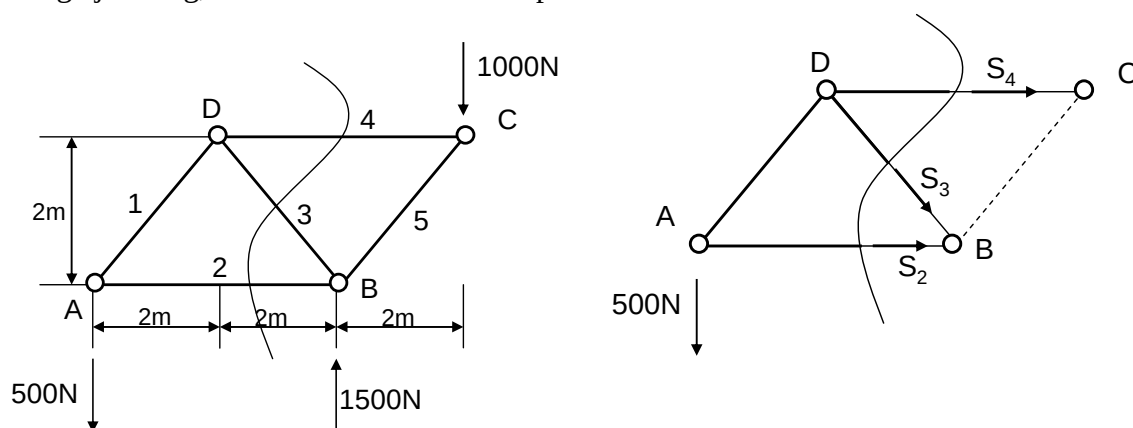
A csomóponti módszerrel a rúderőket csak egymás után határozhatjuk meg. Terjedelmesebb szerkezetnél ez a módszer eléggé hosszadalmas. Sok esetben előfordul, hogy csak néhány rúderőre vagyunk kíváncsiak. Az ilyen esetekben alkalmazható a háromrudas átmetsző módszer.

A módszer lényege a következő: Az egyensúlyban lévő rácsos szerkezetet egy képzeletbeli átmetszéssel két részre bontjuk. A metszésvonal által elmetezett rudak hatásvonalai nem mehetnek át egy ponton.



Ha az elvágás helyén a megfelelő rúdirányú erőket működtetünk, az egyensúly mindkét szerkezeti részre külön-külön helyreállítható. Az egyensúlyt biztosító erők lesznek az elvágott rudakban ébredő rúderők.

Vizsgáljuk meg, az előző feladatban szereplő szerkezetet!



Síkbeli erőrendszer esetén az egyensúly feltételét az alábbi egyenletekkel fogalmazhatjuk meg.

$\sum M = 0$	vagy	$\sum M_1 = 0$	(A három kiválasztott pont 1,2,3 nem illeszkedhet a sík egy egyenesére!)
$\sum X_i = 0$		$\sum M_2 = 0$	
$\sum Y_i = 0$		$\sum M_3 = 0$	

Keressünk 3 olyan pontot, amelyre az erők nyomatékát könnyű kiszámítani.

Ha a B pontot választjuk, akkor a nyomatéki egyenlet a következő:

$$500 \cdot 4 - S_4 \cdot 2 = 0 \rightarrow S_4 = 1000 \text{ N}$$

Az S_4 erőre kapott eredmény előjele +, ezért a feltételezett irány helyes. Ez azt jelenti, hogy az S_4 erő húzza a rúd végét, tehát a rúd húzott.

A B pont kiválasztásánál az játszott szerepet, hogy az S_2 és S_3 rúderők hatásvonala is átmegy a ponton, így ezek nyomatéka zérus. Azt a pontot, ahol két ismeretlen rúderő hatásvonala átmegy, főpontnak nevezzük.

Válasszuk most a D pontot és írjuk fel erre a pontra az erőrendszer nyomatékát.

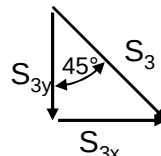
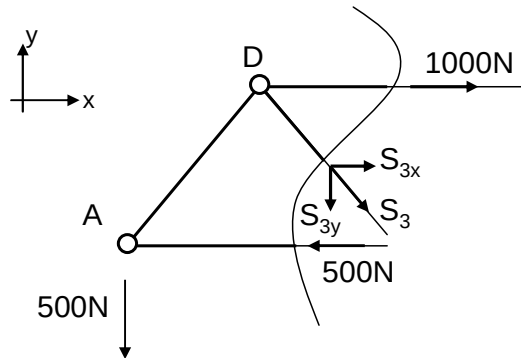
$$500 \cdot 2 + S_2 \cdot 2 = 0 \rightarrow S_2 = -500 \text{ N}$$

Az eredmény előjele -, ezért az előre felvett irány nem megfelelő. Ha az erő irányát megfordítjuk, akkor az S_2 rúd nyomottá válik. A D pont ugyancsak főpont.

Az S_2 , S_3 rudak B illetve az S_3 , S_4 rudak D metszéspontját már kiválasztottuk. A harmadik főpont az S_2 , S_4 rudak metszéspontja lenne. Mivel ezek párhuzamosak, a főpont a végtelenben van, így nem használható.

Az ismeretlen S_3 rúderő meghatározására két lehetőségünk van:

- Válasszunk egy harmadik pontot, amely nem megy át az S_3 rúd hatásvonalán. Erre felírhatjuk a nyomatéki egyenletet, amiből meghatározható az S_3 rúderő. Ebben az esetben az S_3 rúderő karjának meghatározása nehézkes.
- Felbonthatjuk a kiválasztott részre ható erőket komponensekre, és felhasználjuk a $\sum X_i = 0$ és $\sum Y_i = 0$ egyenleteket az ismeretlenek meghatározására.



$$\sum X_i = 0$$

$$-500 + S_{3x} + 1000 = 0$$

$$S_{3x} = -500 \text{ N}$$

$$\sum Y_i = 0$$

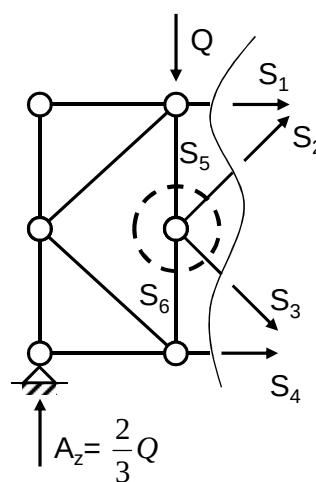
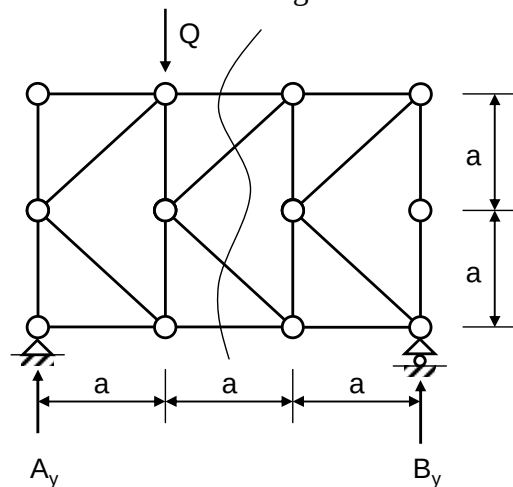
$$-500 - S_{3y} = 0$$

$$S_{3y} = -500 \text{ N}$$

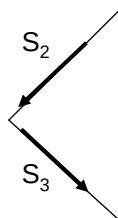
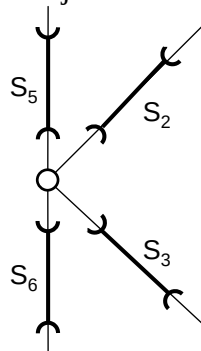
Az eredmények előjelének figyelembevételével az S_3 rúd nyomott és az erő értéke $500\sqrt{2} \text{ N}$

4.) „K” rácsozású tartók számítása

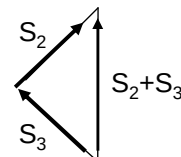
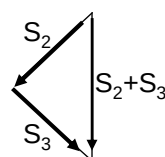
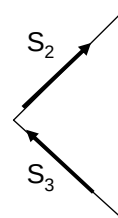
Az úgynevezett „K” rácsozású tartónál a szerkezet két részre osztásakor legkevesebb 4 rúd elmetzése szükséges.



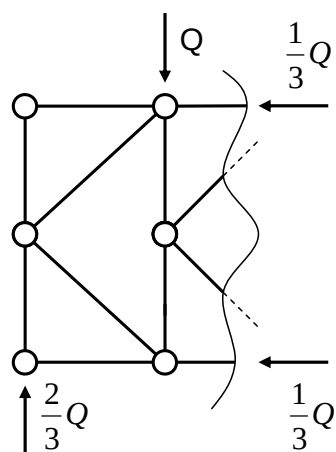
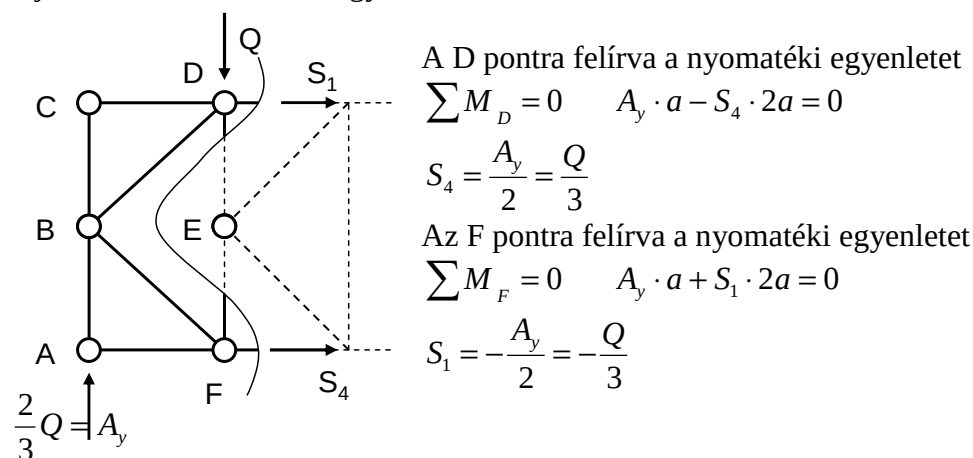
Az előző ábrán bejelölt csomópont erőjátékát elemezve az alábbi eredményre jutunk.



vagy



A négy rudat összekapcsoló csap csak úgy lehet egyensúlyban, ha az S_2 és S_3 erők eredőjének vízszintes komponense zérus. Az S_2+S_3 eredő erővel szemben az S_5 és S_6 rúd fejt ki erőhatást. Ezeket figyelembe véve az átmetszést az alábbi módon hajtjuk végre.



Az S_2 és S_3 rúdágban olyan erőknek kell ébredni, hogy az S_2+S_3 , $\frac{2}{3}Q$, Q erők a függőleges irányban egyensúlyt tartanak. Ebből adódik, hogy az S_2+S_3 erő felfelé mutat és értéke $\frac{1}{3}Q$ nagyságú.

Az alábbi ábrán a sraffozott két háromszög hasonló. Ebből

$$\frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{3}Q}{S_2}$$

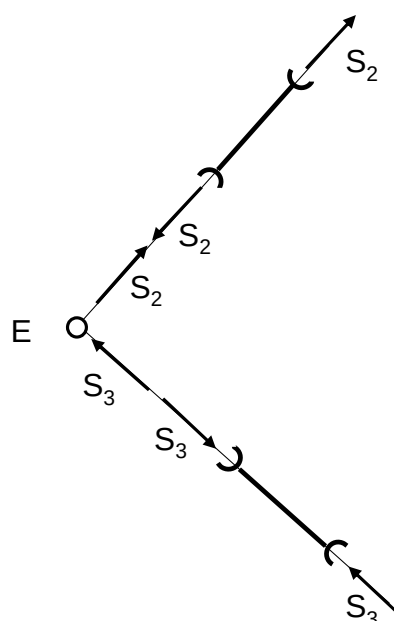
$$S_2 = Q \frac{\sqrt{2}}{6} \rightarrow S_3 = Q \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Az S_2 és S_3 erők iránya az erőháromszögben látható.

Az előző esetben kiszámított S_2 , S_3 erők az

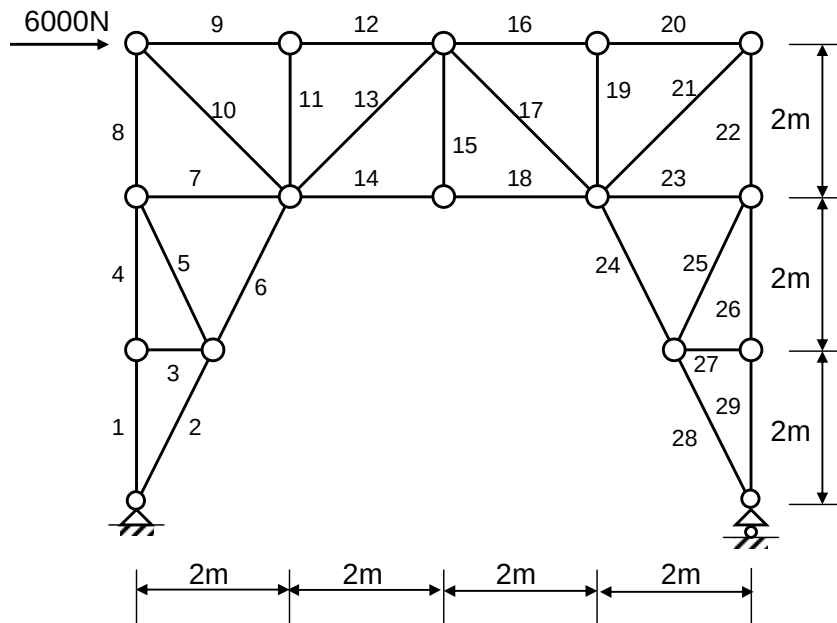
E csomópontokra hatnak.

Ennek megfelelően az S_2 rúd húzott, az S_3 rúd nyomott.



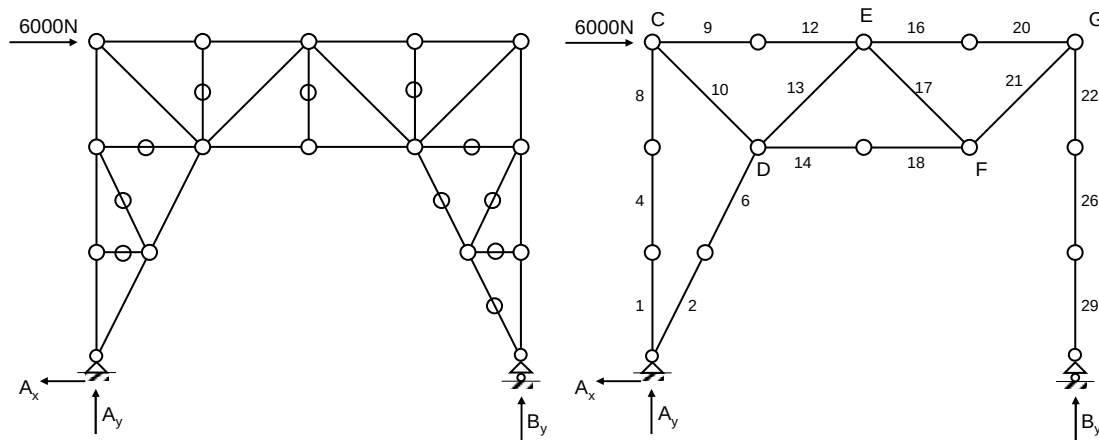
5.) Példák a rácsos szerkezetek témakörből

1. példa



Határozzuk meg a vázolt szerkezet rúd-erőit!

A megoldáshoz vezető első lépés a vakrudak kijelölése (ha van ilyen). A vakrudak ugyanis kihagyhatók a szerkezetből, így a számítás is könnyebb.



Következő lépésként határozzuk meg a kényszererőket.

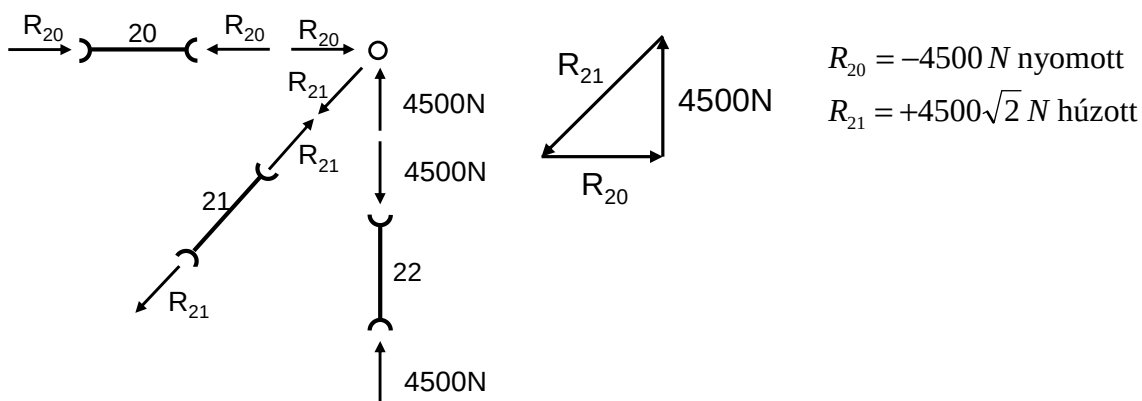
$$\sum X_i = 0 \quad 6000 - A_x = 0 \rightarrow \underline{A_x = 6000 \text{ N}}$$

$$\sum M_A = 0 \quad 6000 \cdot 6 - B_y \cdot 8 = 0 \rightarrow \underline{B_y = 4500 \text{ N}}$$

$$\sum Y_i = 0 \quad A_y + B_y = 0 \rightarrow A_y = -B_y \rightarrow \underline{A_y = -4500 \text{ N}}$$

Különösebb számítás nélkül meghatározható, hogy a R_{22}, R_{26}, R_{29} rudak nyomottak és az erők értéke 4500N

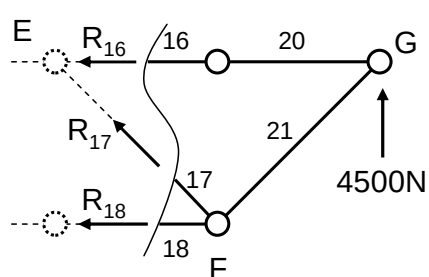
A G csomópont egyensúlya



Mivel az R_{16} és R_{20} rudak hatásvonala közös

$$R_{16} = R_{20} = -4500 \text{ N}$$

Hajtsuk végre az alábbi 3 rudas átmetszést



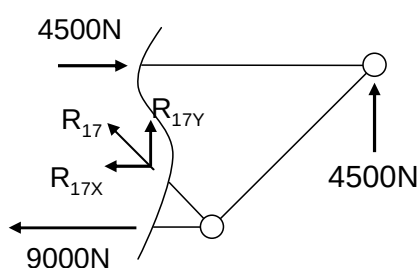
$$\sum M_F = 0 \quad 4500 \cdot 2 + R_{16} \cdot 2 = 0$$

$$R_{16} = -4500 \text{ N} \text{ nyomott (egyezik az előző értékkel)}$$

$$\sum M_E = 0 \quad R_{18} \cdot 2 - 4500 \cdot 4 = 0$$

$$R_{14} = 9000 \text{ N} \text{ húzott}$$

$$R_{18} = 9000 \text{ N} \text{ húzott}$$



$$\sum X_i = 0 \quad R_{17x} + 9000 - 4500 = 0$$

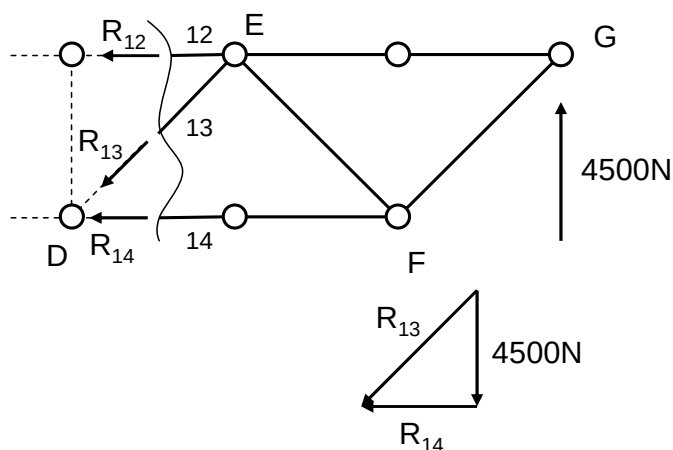
$$R_{17x} = -4500 \text{ N}$$

$$\sum Y_i = 0 \quad R_{17y} + 4500 = 0$$

$$R_{17y} = -4500 \text{ N}$$

$$R_{17} = -4500\sqrt{2} \text{ N} \text{ nyomott}$$

Az $R_9, R_{12}, R_{13}, R_{14}$ rúderők meghatározására az alábbi 3 rudas átmetszést alkalmazzuk.



$$\sum M_E = 0$$

$$R_{14} \cdot 2 - 4500 \cdot 4 = 0$$

$$R_{14} = 9000 \text{ N} \text{ húzott}$$

$$R_{18} = 9000 \text{ N} \text{ húzott}$$

$$\sum M_D = 0$$

$$R_{12} \cdot 2 + 4500 \cdot 6 = 0$$

$$R_{12} = -13500 \text{ N} \text{ nyomott}$$

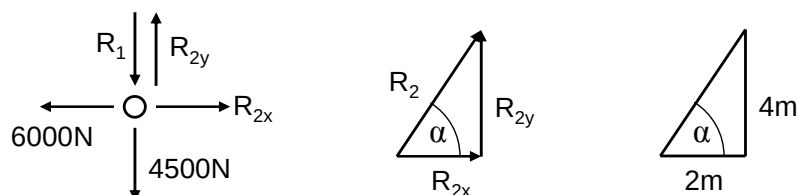
$$R_9 = -13500 \text{ N} \text{ nyomott}$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -R_{13y} + 4500 = 0$$

$$R_{13y} = 4500 \text{ N}$$

$$R_{13} = 4500\sqrt{2} \text{ N húzott}$$

Vizsgáljuk meg az A csomópont egyensúlyát



$$\sum X_i = 0$$

$$-6000 + R_{2x} = 0 \quad R_{2x} = 6000 \text{ N}$$

A hasonló háromszögek alapján

$$\frac{R_{2y}}{R_{2x}} = \frac{4}{2} \rightarrow R_{2y} = 2R_{2x} = 12000 \text{ N}$$

Az R_2 rúderő

$$R_2 = \sqrt{R_{2x}^2 + R_{2y}^2} = \sqrt{6000^2 + 12000^2} = 6000\sqrt{5} \text{ N húzott}$$

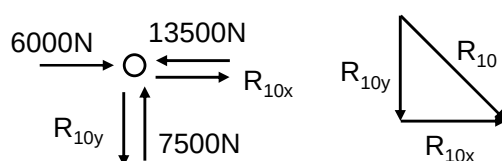
$$R_6 = 6000\sqrt{5} \text{ N húzott}$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$-R_1 + 12000 - 4500 = 0 \quad R_1 = -7500 \text{ N nyomott}$$

$$R_4 = R_8 = -7500 \text{ N nyomott}$$

Az R_{10} meghatározásához vizsgáljuk meg a C csomópontot



$$\sum X_i = 0$$

$$6000 + R_{10x} - 13500 = 0 \quad R_{10x} = 7500 \text{ N}$$

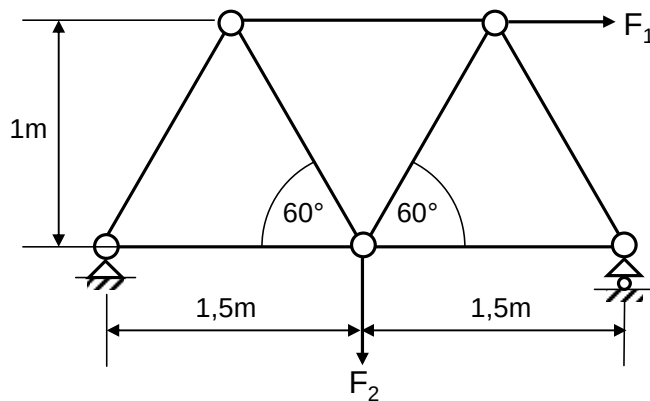
$$\sum Y_i = 0$$

$$-R_{10y} + 7500 = 0 \quad R_{10y} = 7500 \text{ N}$$

$$R_{10} = 7500\sqrt{2} \text{ N húzott}$$

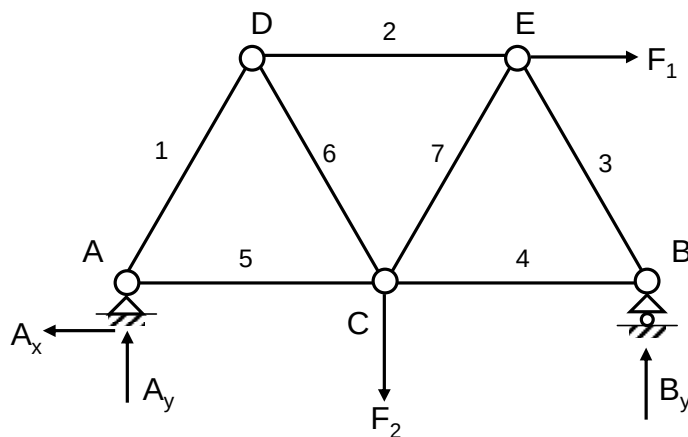
táblázatosan összefoglalva	
rúdszám	rúderő
1	- 7500 N nyomott
2	+ 6000√5 N húzott
4	- 7500 N nyomott
6	+ 6000√5 N húzott
8	- 7500 N nyomott
9	- 13500 N nyomott
10	+ 7500√2 N húzott
12	- 13500 N nyomott
13	+ 4500√2 N húzott
14	+ 9000 N húzott
16	- 4500 N nyomott
17	- 4500√2 N nyomott
18	+ 9000 N húzott
20	- 4500 N nyomott
21	+ 4500√2 N húzott
22	- 4500 N nyomott
26	- 4500 N nyomott
27	- 4500 N nyomott

2. példa



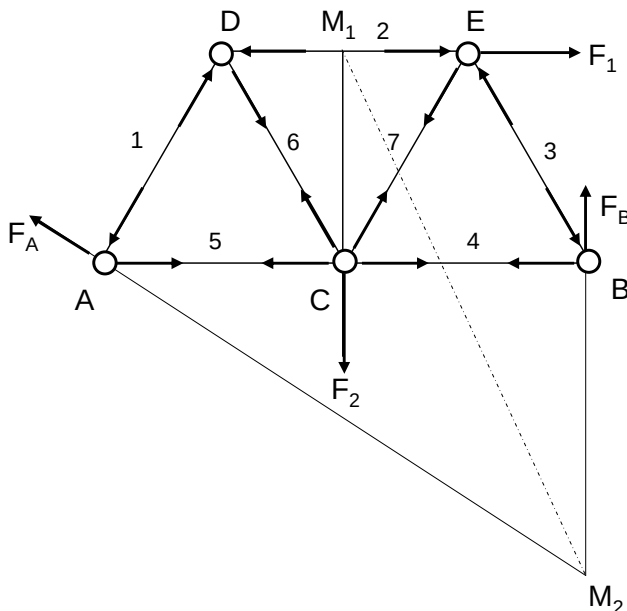
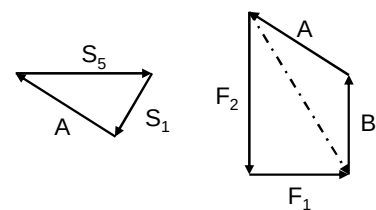
Határozzuk meg az A és B reakcióerőt, valamint a rúderők nagyságát és jellegét!

$$F_1 = 1000\text{N} \quad F_2 = 2000\text{N}$$



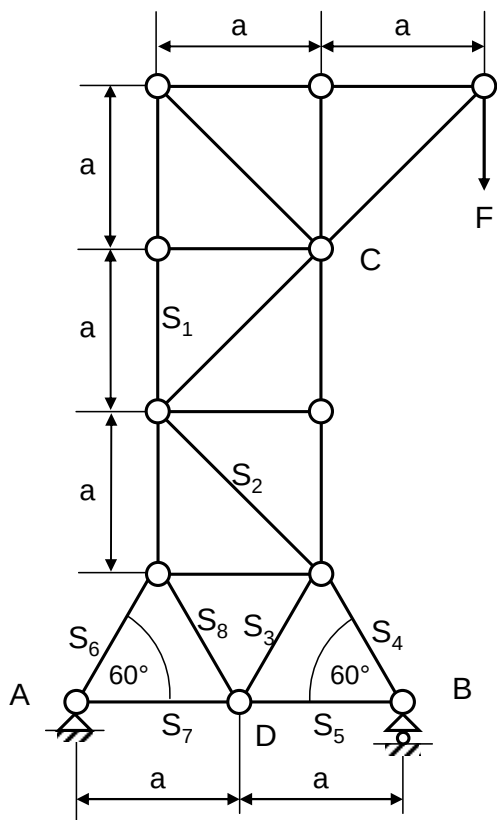
Elsőnek az F_1 és F_2 eredőerejét, majd a reakcióerőket határozzuk meg. Ezek ismeretében már nem nehéz – csomópontról csomópontra haladva a rúderők meghatározása. Az A csomópont egyensúlyának megrajzolásánál az A reakcióerő végpontjából az 5-ös, kezdőpontjából az 1-es rúddal húzunk párhuzamost. Megállapíthatjuk, hogy az 5-ös rúd húzott, az 1-es pedig nyomott.

A többi rúderőt ugyancsak vektorháromszögekkel lehet meghatározni. A végeredményeket az alábbi táblázat és a hozzá tartozó ábra mutatja.



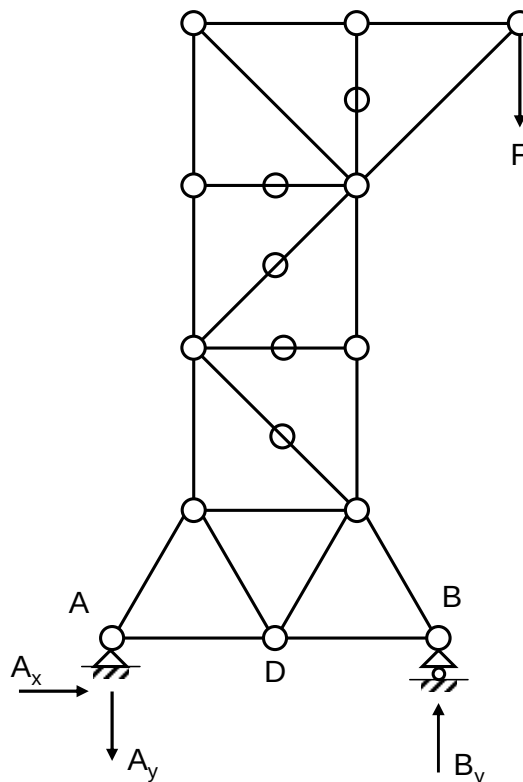
rúderő	
jele	nagysága
1	-900N
2	-1000N
3	-1750N
4	+1250N
5	+1600N
6	+750N
7	+1500N

3. példa



Határozza meg a kijelölt rudakban ébredő igénybevételek típusát és nagyságát, valamint határozza meg A és B reakcióerőit!

$F=1000\text{N}$ $a=1,5\text{m}$



$$\sum M_A = 0 \quad F \cdot 2,5a - B_y \cdot 2a = 0$$

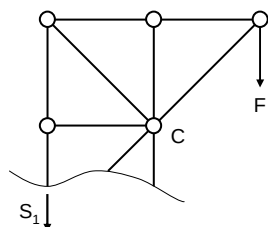
$$B_y = F \cdot \frac{2,5}{2} = 1250 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - F = 0$$

$$A_y = -F + B_y = -1000 + 1250 = 250 \text{ N}$$

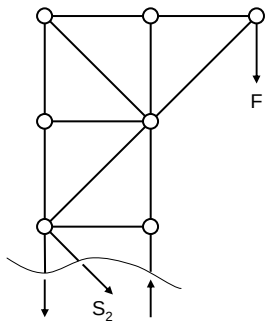
S_1 meghatározása átmetsző módszerre:



$$\sum M_C = 0 \quad S_1 \cdot a - F \cdot a = 0$$

$$S_1 = F = 1000 \text{ N}$$

S_2 meghatározása átmetsző módszerrel:

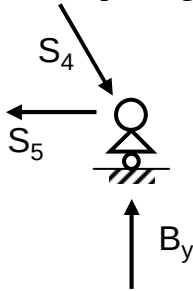


A felső részre ható vízszintes irányú erők egyensúlyából:

$$\sum F_x = 0 \quad S_{2x} = 0 \rightarrow S_2 = 0 \text{ N}$$

Ennek megfelelően S_2 vakrúd.

B csomópont egyensúlya (csomóponti módszerrel):



$$\sum F_y = 0 \quad B_y - S_4 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$S_4 = \frac{B_y}{\sin 60^\circ} = \frac{1250}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1443,38 \text{ N}$$

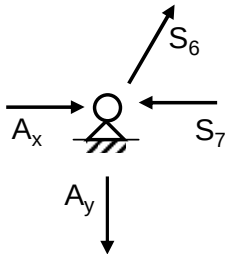
$S_4 = 1443,38 \text{ N}$ nyomott

$$\sum F_x = 0 \quad S_4 \cdot \cos 60^\circ - S_5 = 0$$

$$S_5 = S_4 \cdot \cos 60^\circ = 1443,38 \cdot \frac{1}{2} = 721,69 \text{ N}$$

$S_5 = 721,69 \text{ N}$ húzott

A csomópont egyensúlyából:



$$\sum F_y = 0 \quad -A_y + S_6 \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$S_6 = \frac{A_y}{\cos 30^\circ} = \frac{250}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 288,68 \text{ N}$$

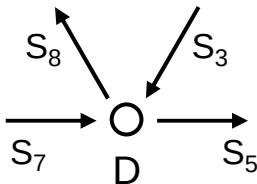
$S_6 = 288,68 \text{ N}$ húzott

$$\sum F_x = 0 \quad S_6 \cdot \sin 30^\circ - S_7 = 0$$

$$S_7 = S_6 \cdot \sin 30^\circ = 288,68 \cdot \frac{1}{2} = 144,34 \text{ N}$$

$S_7 = 144,34 \text{ N}$ nyomott

D csomópont egyensúlyából:



$$\sum F_y = 0 \quad -S_3 \cdot \sin 60^\circ + S_8 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

$$S_8 = S_3$$

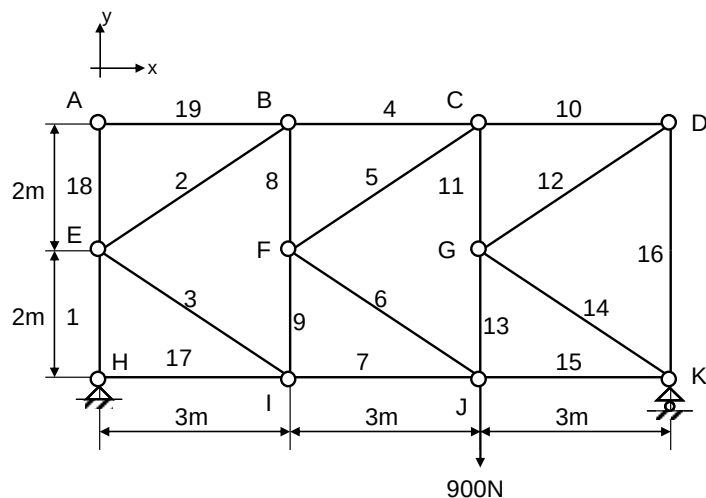
$$\sum F_x = 0 \quad S_7 + S_5 - S_8 \cdot \cos 60^\circ - S_3 \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$S_3 = \frac{S_7 + S_5}{2 \cdot \cos 60^\circ} = \frac{144,34 + 721,69}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 866,03 \text{ N}$$

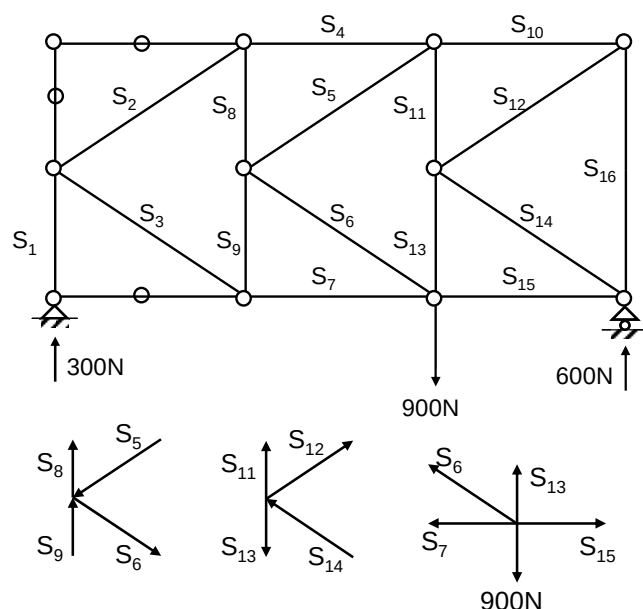
$S_3 = 866,03 \text{ N}$ nyomott.

4. feladat

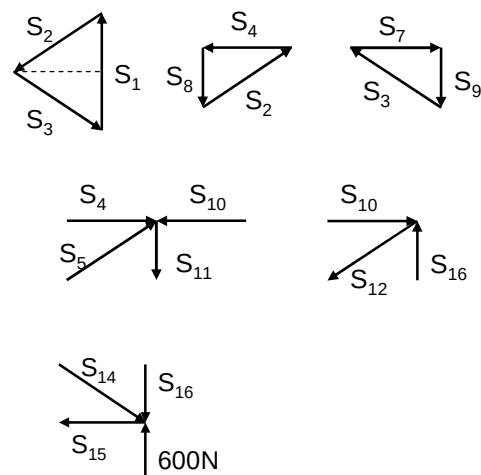
Határozzuk meg a vázolt síkbeli rácsos tartó rúdjaiban ébredő igénybevételeket!



Határozzuk meg a vakrudakat!



Teljességgként megadjuk az egyes csomópontokban az erőjátékokat.



Felhasználva a hasonló háromszögek tulajdonságait az egyes rúderők a geometria ismeretében meghatározhatók.

rúd	nagysága	
1	-300	nyomott
2	$-75\sqrt{13}$	nyomott
3	$75\sqrt{13}$	húzott
4	-225	nyomott
5	$-75\sqrt{13}$	nyomott
6	$75\sqrt{13}$	húzott
7	225	húzott

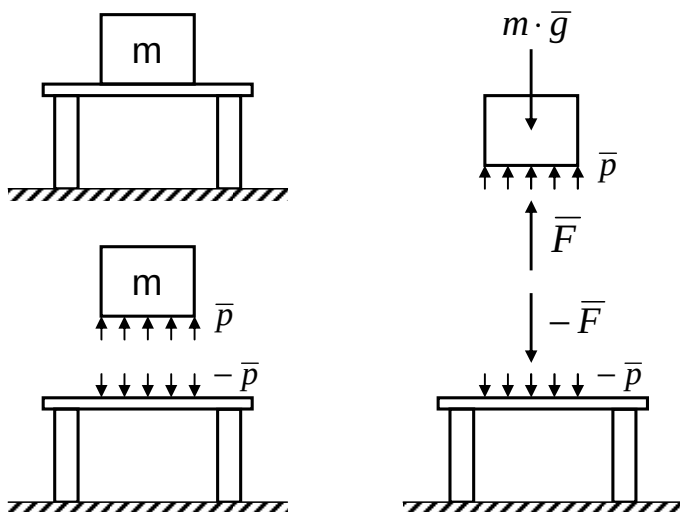
8	150	húzott	9	-150	nyomott	10	450	húzott
11	-300	nyomott	12	$150\sqrt{13}$	húzott	13	300	húzott
14	$-150\sqrt{13}$	nyomott	15	450	húzott	16	-300	nyomott
17	0		18	0		19	0	

VII.) Súrlódás

1.) A súrlódás fizikai értelmezése

A statikai számítások során gyakran élünk azzal a számításokat egyszerűbbé tevő feltételezéssel, hogy az érintkező testek végtelen merevek és felületük abszolút sima. Bár a technika fejlődése egyre „erősebb” (merevebb) anyagokat és egyre „simább” (finomabb megmunkálású) felületeket képes előállítani, de a végtelen merev és abszolút sima szerkezeti elemek nem léteznek. A testek felszíne még a leggondosabb megmunkálás esetén is érdes (egyenetlenségeket, bemélyedéseket, kitüremkedéseket tartalmazhat).

Következő vizsgálattal arra adunk választ, hogy az ilyen felületű testek érintkezésekor, milyen erők lépnek fel.



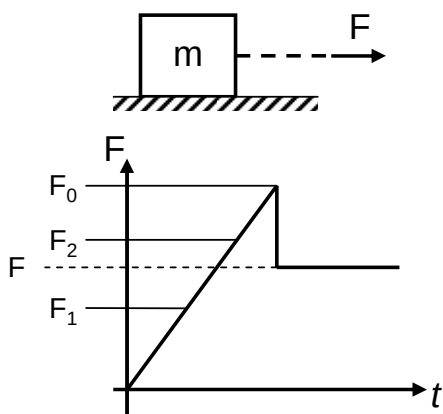
Az ábrán feltüntetett m tömegű test és az alátámasztó asztal végtelen merev és abszolút sima. Az asztal pedig vízszintes helyzetű. A homogén tömegeloszlású m tömegű test és az asztal érintkezési felületén p intenzitású egyenletes megoszló erőrendszer keletkezik. Az erőrendszer eredője $\bar{F}$ és $-\bar{F}$.

A merev test egyensúlyát az $-m\bar{g} + \bar{F} = \bar{0}$ vektoregyenlet, illetve a $-mg + |\bar{F}| = 0$ skalár egyenlet írja le!

Ha ugyanezt a kísérletet elvégezzük úgy, hogy mind az m tömegű test, mind az asztal érdes felületű, az eredményt leíró egyenletek nem változnak.

A fenti két eset egyikében sem akartunk relatív mozgást előidézni a test és az asztal között. Végezzük el most a következő két kísérleteket.

a,



Érdes felületen nyugvó m tömegű testre, hasunk az időben folyamatosan növekvő $F(t)$ erővel, mindaddig, amíg a test meg nem mozdul, majd olyan erővel, amivel az egyenletes mozgást biztosítani tudjuk.

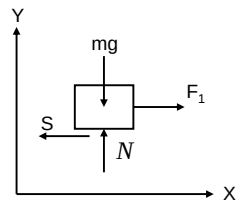
Az erő változását az idő függvényében mutatja az ábra.

Amikor az $F(t)=0$, akkor a merev test egyensúlyát leíró egyenlet az alábbi

$$-mg + N = 0$$

N , a felületeket összeszorító erő

Ha $F(t)=F_1$



$$-mg + N = 0$$

$$-S + F_1 = 0 \rightarrow S = F_1$$

S = súrlódásból adódó erő

Ha $F(t)=F_2$, akkor

$$-mg + N = 0$$

$$-S + F_2 = 0 \rightarrow S = F_2$$

Ha az $F(t)=F_0$, a testet az elmozdulás határhelyzetébe kerül,

$$-mg + N = 0$$

$$-S + F_0 = 0 \rightarrow S = F_0$$

Az elmozdulás határhelyzetében mért súrlódási erő ($S=F_0$) és a felületeket összeszorító erő (N) hányadosaként értelmezhetjük az úgynevezett nyugvásbeli (nyugvó) súrlódási tényezőt.

$$\mu_0 = \frac{F_0}{N}$$

A test egyenletes mozgathatásához az F_0 erőnél kisebb erő is elegendő. Megcsúszás után bármekkora erő is mozgathatja a testet a súrlódási erő állandó és nem nagyobb, mint a felületeket összeszorító erő és a csúszási súrlódási tényező szorzata.

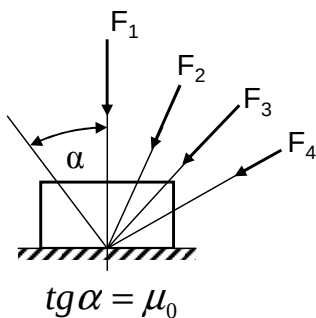
Vagyis $S = \mu \cdot N$ ahol μ az úgynevezett csúszási súrlódási tényező.

Addig a pillanatig, amíg a test meg nem csúszik, csak akkora súrlódási erő keletkezik, ami megakadályozza a mozgást.

A két súrlódási tényező között az alábbi reláció áll fent

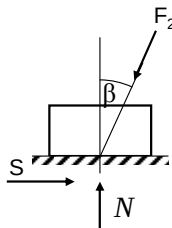
$$\mu_0 > \mu$$

b,



A μ_0 súrlódási tényezőjű érdes felületen elhelyezett súlytalan testre az ábrán vázolt hatásvonalú (F_1, F_2, F_3, F_4) erőkkel hatunk külön-külön.

Mindaddig, amíg az erő hatásvonala az $\alpha = \arctg \mu_0$ fél kúpszögű kúp szélső alkotóin belül hat, a testre ható erők képesek egyensúlyt tartani.



Az F_2 erő alkalmazásakor az erők egyensúlyát az alábbi egyenletek fejezik ki.

$$-F_2 \cos \beta + N = 0$$

$$S - F_2 \sin \beta = 0$$

A ténylegesen fellépő súrlódási erő

$$S = F_2 \sin \beta.$$

A két test között lévő súrlódásból az érintkezési síkon létrejöhető súrlódási erő

$$S_0 = \mu_0 N = \mu_0 F_2 \cos \beta.$$

Mindaddig, amíg $S_0 > S$, a két test nem mozdul el egymáshoz képest.

Képezzük az alábbi hányadost

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\mu_0 F_2 \cos \beta}{F_2 \sin \beta} = \frac{\mu_0}{\tan \beta}$$

Ez a hányados $\beta = \alpha$ értéknél válik eggyé, vagyis a ténylegesen fellépő súrlódási erő megegyezik az érintkezési síkban létrejöhető súrlódási erővel.

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\mu_0}{\tan \beta} = \frac{\mu_0}{\mu_0} = 1.$$

Ha $\beta > \alpha$ akkor a statikai egyensúly már nem biztosítható.

A 2α nyílásszögű kúpot súrlódási kúpnak nevezzük. A kúp tengelye megegyezik az érintkező felületek közös normálisával.

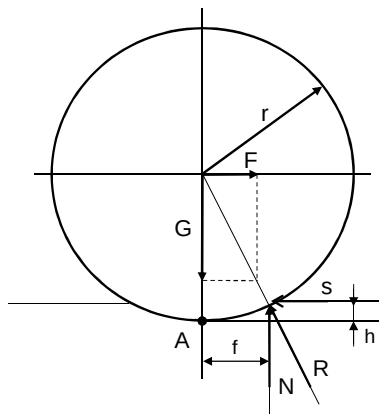
	mozgásbeli	nyugvásbeli
Súrlódási erő	$S = \mu \cdot N = \text{állandó}$	az egyensúly fenntartásához szükséges $S \leq \mu_0 \cdot N$ felső határral
Súrlódási erő iránya	pillanatnyi sebességgel ellentétes	az elmozdulást kiváltani kívánó erővel ellentétes irányú
Súrlódás tényező	μ	$\mu < \mu_0$ μ_0

Kísérlet: Fogjunk két telefonkönyvet, és laponként, egyesével lapozzuk őket egymásba. Vajon mekkora erőre van szükség ahhoz, hogy a két telefonkönyvet szétszedjük? A válasz a fejezet végén a példák előtt található.

2.) Gördülési ellenállás

A testek a valóságban nem végtelen merevek. Külső erő hatására deformálódnak. Ezek a deformációk bizonyos mozgásformák esetén a mozgással vagy annak létrejöttével szemben ellenállást fejtenek ki. Ha egy kör keresztmetszetű test egy másik testen az érintkező felületek egymáson történő lefejtődése útján legördül, akkor gördülő mozgásról beszélünk. Ha egy korongot szeretnénk egy másik testen legördíteni, akkor külső erőhatásra van szükség, mert a két test közötti érintkezési felületeken a deformációk miatt ellenállás alakul ki. Ezt a legördülést akadályozó ellenállást gördülési ellenállásnak nevezzük.

Vizsgáljuk meg az elmozdítani kívánt korongra ható erőket, ha a mozgást erőhatással akarjuk kiváltani.



Az elmozdulás határhelyzetében lévő korongra ható három erő egyensúlyban van. A hatásvonalaiak egy közös ponton mennek át.

Egyenletekkel kifejezve

$$\vec{G} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

A talajról átadódó $\vec{R}$ erővektor felbontható két komponensre.

$$\vec{R} = \vec{S} + \vec{N}$$

f gördülési ellenállás karja

Az ábrán látható h távolság a kis deformációk miatt elhanyagolható.

Ezeket figyelembe véve az alábbi egyensúlyi egyenletek írhatók fel

$$\sum X_i = 0 \quad F - S = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -G + N = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F \cdot r + N \cdot f = 0$$

(Az $S \cdot h = 0$ feltételezéssel)

Az S súrlódó erő értéke csak véges nagyságot érhet el.

$$S_{\max} = \mu_0 N$$

Ha az F erő ennél nagyobb értékű, a korong megcsúszik.

Az egyensúlyi egyenletekből

$$F = \frac{f}{r} N$$

A gördülés feltétele

$$F \leq S \quad \text{illetve} \quad \frac{f}{r} N \leq \mu_0 N$$

$$\text{amiből} \quad \frac{f}{r} \leq \mu_0$$

Az f kar nagyságát az érintkező testek deformációja szabja meg. Az f értéke a mérnöki gyakorlatban igen kicsi, ezért a gördülés jelentősen kisebb ellenállást jelent, mint a csúszás.

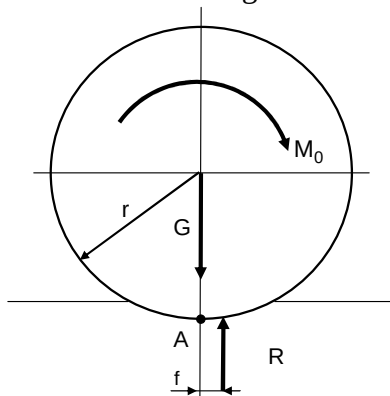
A gördülési sugarat a gördülési ellenállás csökkentése érdekében kívánatos minél nagyobbra választani.

f értékei néhány anyagra:

Acél-acélon $f=0,05 \text{ cm}$

Gördülő csapágy $f=0,0005 \text{ cm}$

Vizsgáljuk meg a korongra ható erőket abban az esetben is, amikor koncentrált nyomaték terheli a korongot.



Mindaddig, amíg gördülés nem jön létre, (a korong nem indul meg) az egyensúlyi egyenletek az alábbiak szerint alakulnak

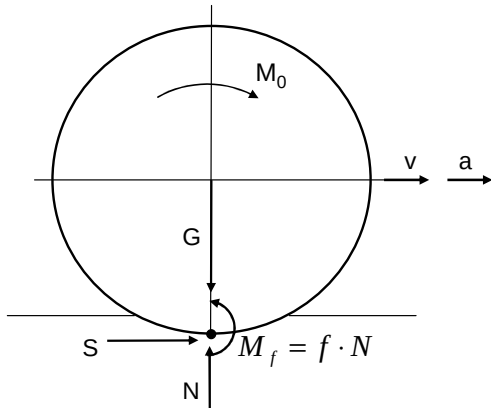
$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad -G + R = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -M_0 + R \cdot f = 0$$

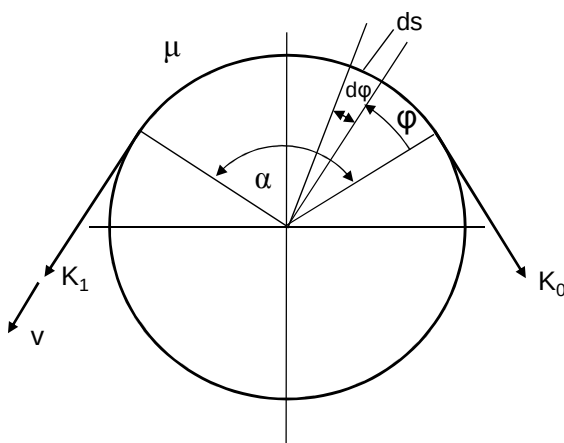
Ez azt jelenti, hogy $M_0 \leq R \cdot f$ esetben az egyensúly biztosításához nem kell súrlódási erő.

Ha az $M_0 > R \cdot f$, akkor az $(M_{0U} - R \cdot f)$ nyomaték a korong gyorsítására törekszik. Ekkor már fellép a súrlódási erő, és a test gyorsulása következtében a tehetetlenségi erő is.

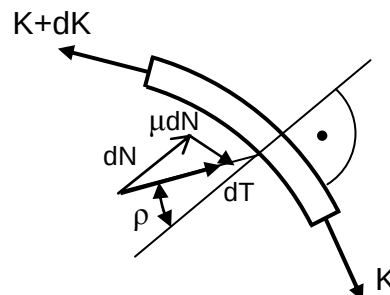


v a megvalósuló mozgási irány.

3.) Kötelsúrlódás



v a kötélt és a koron közötti relatív mozgás. Vizsgáljuk meg a ds hosszúságú kötélelem egyensúlyát.



$$\operatorname{tg} \rho = \mu \quad (\rho \text{ a súrlódási félkúpszög})$$

μ = a kötélt és a dob közötti súrlódási tényező

A dT kényszererő a μ súrlódási tényezőnek megfelelő ρ szöget zár be a normális iránnyal. Kis szögek miatt $\sin d\varphi = 0$, $\cos d\varphi = 1$

$$K \cdot d\varphi = dN$$

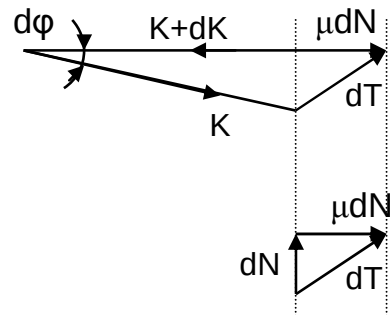
$$dK = \mu dN = \mu K d\varphi$$

$$\text{ebből } \frac{dK}{K} = \mu d\varphi,$$

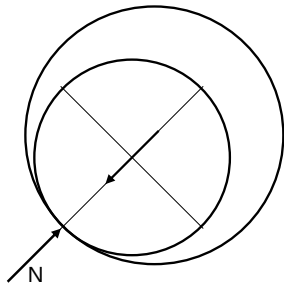
$$\int_{K_0}^{K_1} \frac{dK}{K} = \mu \int_0^\alpha d\varphi \rightarrow \ln \frac{K_1}{K_0} = \mu \alpha$$

illetve $K_1 = K_0 e^{\mu \alpha}$ (ahol α szög radiánban értendő)

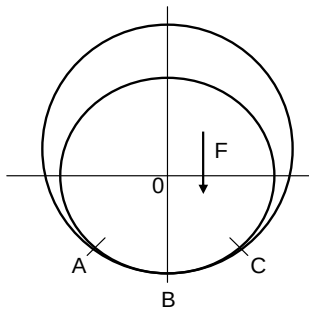
Az egyensúly mindaddig fennáll, amíg $K_1 \leq K_0 e^{\mu \alpha}$



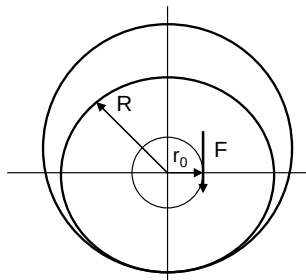
4.) Csapsúrlódás



Ideális csap esetén, ahol a testek végtelen merevek és a felületeik végtelenül simák. A csap egyensúlya csak az ábrán feltüntetett módon jöhet létre.

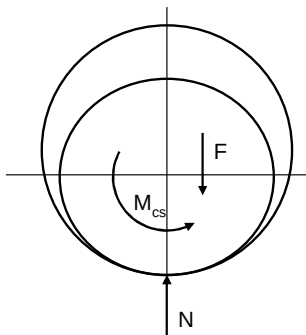


Valóságos csap esetén, ahol van súrlódás és a testek is deformálódnak, a csap valamely véges (A-C) felületen fekszik fel. Ha a csap terhelése nem a csap középpontján halad át, akkor a felfekvő felületen súrlódó erő is ébred, amely – bizonyos határokon belül – megakadályozza a mozgást.



A csapra ható F erő hatásvonalát a csap középpontjától távolítva elérünk egy határhelyzetet, ahol a csap megcsúszik. Ehhez a határhelyzethez tartozó r_0 sugarú kört nevezzük a csapsúrlódás körének.

Az $r_0 = R \cdot \sin \rho$, ahol R a csap sugara ρ a felületek közötti súrlódási félkúpszög. $\tan \rho = \mu$



Számításaink során a csap súrlódását az ábrán látható helyettesítéssel vehetjük figyelembe.

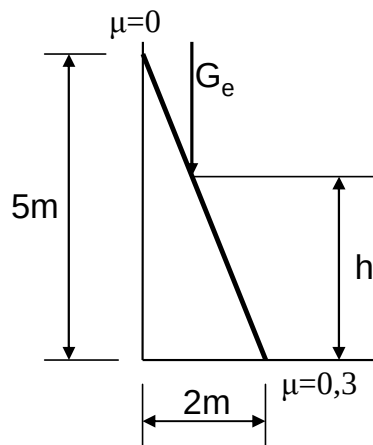
$$M_{cs} \leq N \cdot r_0$$

A kísérlet megoldása: a telefonkönyv lapjai óriási felületet biztosítanak, valamint a papírlapok apró egyenetlenségei növelik a súrlódási együtthatókat. Ehhez járul még hozzá az is, hogy a papírlapok tömege bár nagyon kicsi, de nem elhanyagolható, és a $S = \mu \cdot N$ összefüggés alapján a mozgató hatás ellen lép fel a súrlódás. Így a súrlódás itt akkora erővel hat az elmozdulás ellen, hogy emberi erővel két 800 oldalas összelapozott telefonkönyvet lehetetlen szétválasztani.

Gépi erővel több, mint 30 kN erőre van szükségünk, hogy szétszakítsuk őket. (Forrás: Mythbusters)

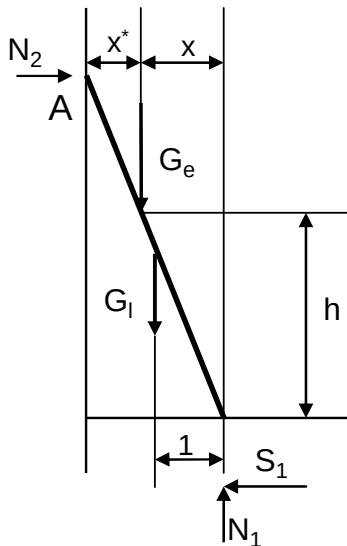
5.) Példák a súrlódás témakörből

1. példa



Adott méretű, $G_l=400\text{N}$ súlyú létra alsó része az érdes ($\mu=0,3$) talajon, felső rész a teljesen sima függőleges falnak támaszkodik.

Milyen magasra mehet fel a $G_e=800\text{N}$ súlyú ember a létrára, hogy éppen ne csússzon meg?



$$\sum M_A = 0$$

$$S_1 \cdot 5 - N_1 \cdot 2 + G_l \cdot 1 + G_e \cdot x^* = 0$$

$$S_1 = \mu \cdot N_1$$

$$\sum Y_i = 0$$

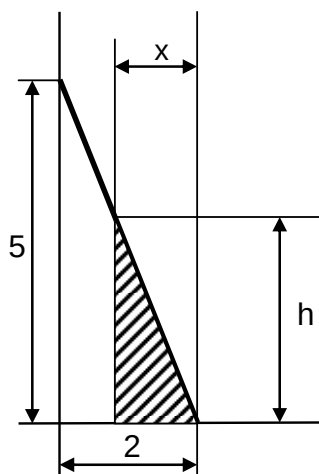
$$G_e + G_l - N_1 = 0$$

$$S_1 = \mu \cdot N_1 = \mu(G_e + G_l)$$

a hasonló háromszögek alapján

$$\frac{x}{2} = \frac{h}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}h \quad x^* = 2 - \frac{2}{5}h$$



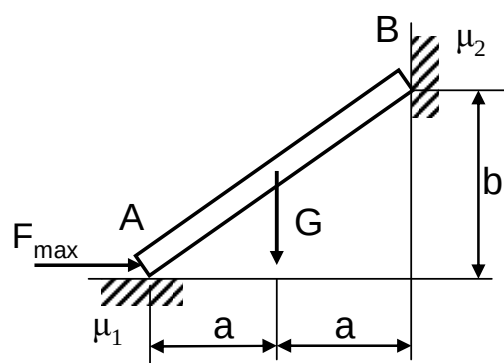
$$\mu(G_e + G_l) \cdot 5 - (G_e + G_l) \cdot 2 + G_l \cdot 1 + G_e \left(2 - \frac{2}{5}h\right) = 0$$

$$0,3(800 + 400) \cdot 5 - (1200) \cdot 2 + 400 + 800\left(2 - \frac{2}{5}h\right) = 0$$

$$1400 = 320h$$

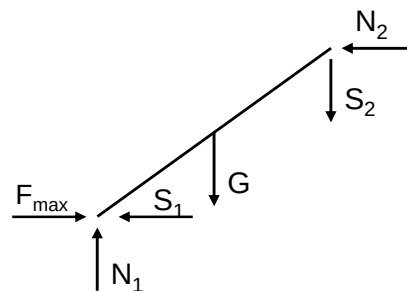
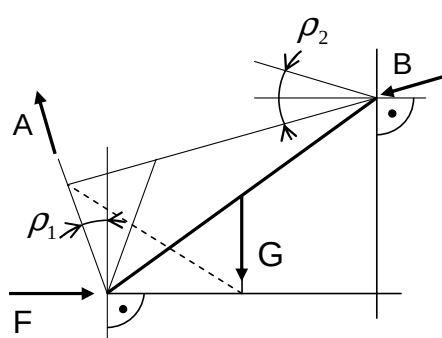
$$h = 4,375\text{m}$$

2. példa

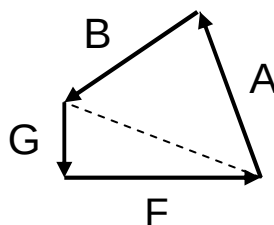


Mekkora az a maximális erő ($F_{\max}$), amelynél a rúd nem csúszik meg a falsarokban?

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0,1 & \mu_2 &= 0,2 \\ a &= 2\text{m} & b &= 3\text{m} \\ G &= 700\text{N}\end{aligned}$$



Négy erő egyensúlya szerkesztéssel



$$\operatorname{tg} \rho_1 = \mu_1$$

$$\operatorname{tg} \rho_2 = \mu_2$$

$$\sum X_i = 0 \quad F_{\max} - S_1 - N_2 = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad N_1 - G - S_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad G \cdot a + S_2 \cdot 2a - N_2 \cdot b = 0$$

$$\mu_1 N_1 = S_1 \quad \mu_2 N_2 = S_2$$

$$\begin{aligned}F_{\max} &= S_1 + N_2 = \mu_1 N_1 + N_2 = \mu_1(G + S_2) + N_2 = \mu_1 G + \mu_1 S_2 + N_2 = \mu_1 G + \mu_1 \mu_2 N_2 + N_2 = \\ &= \mu_1 G + N_2(1 + \mu_1 \mu_2)\end{aligned}$$

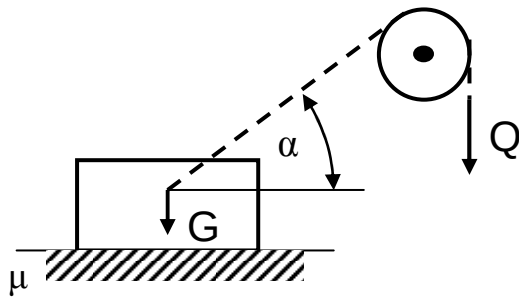
$$G \cdot a + \mu_2 N_2 \cdot 2a - N_2 \cdot b = 0 \rightarrow G \cdot a = N_2 \cdot b - \mu_2 \cdot 2 \cdot a \cdot N_2 = N_2(b - \mu_2 \cdot 2 \cdot a)$$

$$N_2 = \frac{G \cdot a}{b - \mu_2 \cdot 2a} = \frac{700 \cdot 2}{3 - 0,2 \cdot 2 \cdot 2} = 636,4 \text{ N}$$

$$F_{\max} = \mu_1 G + \frac{G \cdot a}{b - \mu_2 \cdot 2 \cdot a} (1 + \mu_1 \mu_2)$$

$$F_{\max} = 0,2 \cdot 700 + \frac{700 \cdot 2}{3 - 0,8} (1 + 0,1 \cdot 0,2) = 140 + 649 = 789 \text{ N}$$

3. példa

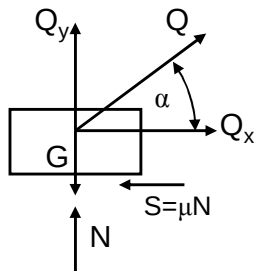


Mekkora az a maximális Q erő, ahol a test még nem mozdul meg?

A korong csapágyazott és súrlódásmentesen forog.

G, μ, α adott!

Egyensúlyi egyenletek:



$$Q_x - \mu N = 0$$

$$Q_y + N - G = 0$$

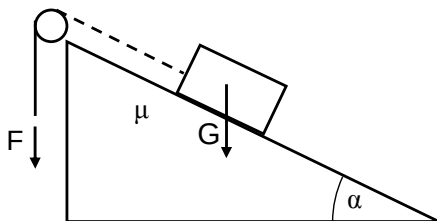
$$Q_y + \frac{Q_x}{\mu} - G = 0$$

$$Q \sin \alpha + \frac{Q \cos \alpha}{\mu} - G = 0$$

$$Q \left(\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\mu} \right) = G$$

$$Q = \frac{G}{\sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{\mu}} = \frac{G \cdot \mu}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

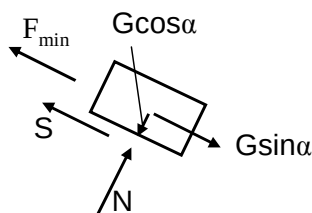
4. példa



Mekkora az a minimális F erő, amivel a rendszer egyensúlyban tartható? Mekkora az a maximális F erő, amelynél a rendszer nem mozdul meg?

Adott G, μ, α

$F_{\min}$ megakadályozza, hogy a test lecsússzon.



$$F_{\min} + S - G \sin \alpha = 0$$

$$N - G \cos \alpha = 0$$

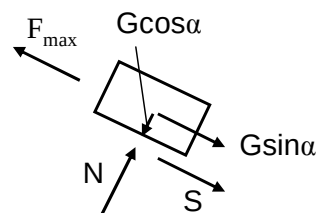
$$S = \mu \cdot N$$

$$F_{\min} + \mu \cdot N - G \sin \alpha = 0$$

$$F_{\min} + \mu \cdot G \cos \alpha - G \sin \alpha = 0$$

$$F_{\min} = G(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$$

$F_{\max}$ a felfelé való elmozdulás határhelyzetébe hozza a testet



$$F_{\max} - S - G \sin \alpha = 0$$

$$N - G \cos \alpha = 0$$

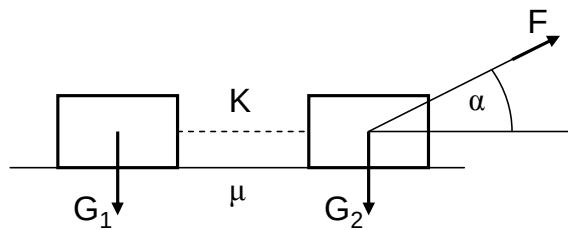
$$S = \mu \cdot N$$

$$F_{\max} - \mu \cdot N - G \sin \alpha = 0$$

$$F_{\max} - \mu \cdot G \cos \alpha - G \sin \alpha = 0$$

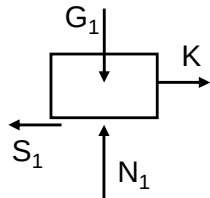
$$F_{\max} = G(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

5. példa



Számítsuk ki az elmozdulás határhelyzetében a K kötélterőt és az F értékét!

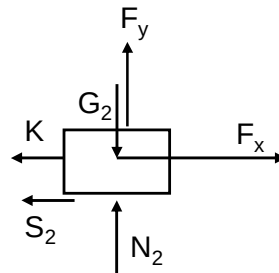
Adott: G_1, G_2, α, μ



$$K - S_1 = 0$$

$$S_1 = \mu \cdot N_1 \quad K = \mu \cdot G_1$$

$$N_1 - G_1 = 0$$



$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

$$-K - S_2 + F_x = 0$$

$$F_x = K + S_2$$

$$F_y - G_2 + N_2 = 0$$

$$N_2 = G_2 - F_y$$

$$S_2 = \mu \cdot N_2$$

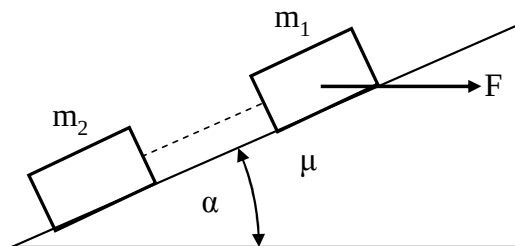
$$S_2 = \mu \cdot N_2 = \mu(G_2 - F_y)$$

$$F \cdot \cos \alpha = \mu \cdot G_1 + \mu(G_2 - F \sin \alpha)$$

$$F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = \mu \cdot G_1 + \mu \cdot G_2 = \mu(G_1 + G_2)$$

$$F = \frac{\mu(G_1 + G_2)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

6. példa



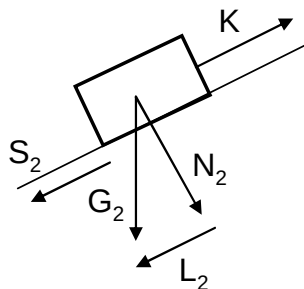
Mekkora F erővel lehet a testeket a felfelé való elmozdulás határhelyzetébe hozni?

$$m_1 = 100 \text{ kg} \quad m_2 = 200 \text{ kg}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$\mu = 0,1$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

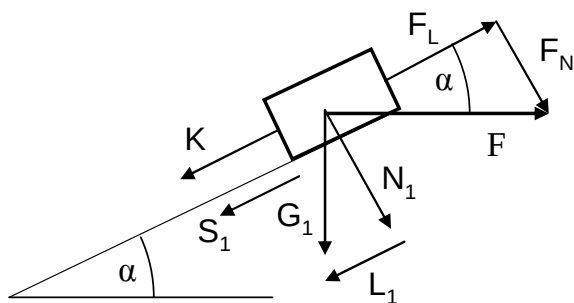


$$K - S_2 - G_2 \sin \alpha = 0$$

$$S_2 = \mu \cdot N_2 = \mu \cdot G_2 \cos \alpha$$

$$L_2 = G_2 \sin \alpha$$

$$K = \mu \cdot G_2 \cos \alpha + G_2 \sin \alpha = G_2(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$



$$F_L = F \cos \alpha$$

$$L_1 = G_1 \sin \alpha$$

$$F_N = F \sin \alpha$$

$$N_1 = G_1 \cos \alpha$$

$$K + S_1 + L_1 = F_L$$

$$S_1 = \mu(F_N + N_1) = \mu(F \sin \alpha + G_1 \cos \alpha)$$

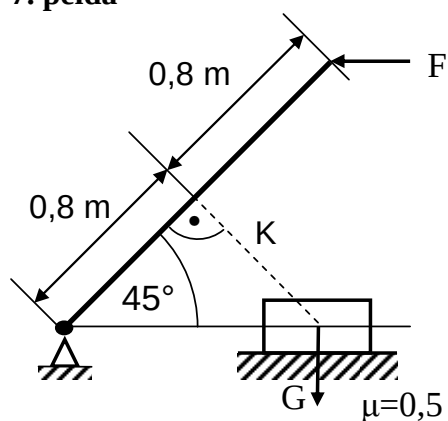
$$K + \mu(F \sin \alpha + G_1 \cos \alpha) + G_1 \sin \alpha = F \cos \alpha$$

$$K + \mu \cdot F \sin \alpha + \mu \cdot G_1 \cos \alpha + G_1 \sin \alpha = F \cos \alpha$$

$$G_2(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) + G_1(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = F(\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha)$$

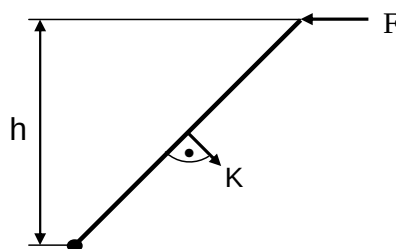
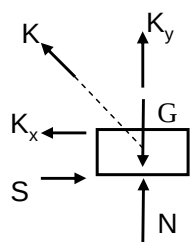
$$\frac{(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)(G_1 + G_2)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = F = \frac{1307,968}{0,9055} = 1444,5 \text{ N}$$

7. példa



Mekkora F erővel lehet a $G=1200\text{N}$ súlyú testet az elmozdulás határhelyzetébe hozni?

$$K_x = K_y$$



$$S = \mu \cdot N$$

$$K_y - G + N = 0$$

$$K_x - S = 0$$

$$h = 1,6 \cdot \cos 45^\circ$$

$$F \cdot h - K \cdot 0,8 = 0$$

$$F = K \cdot \frac{0,8}{1,6 \cdot \cos 45^\circ} = K \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = K \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K_y - G + N = K_x - G + N = K_x - G + \frac{K_x}{\mu} = 0$$

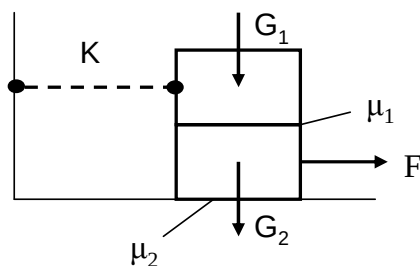
$$K_x \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = G$$

$$F = \frac{G}{1 + \frac{1}{\mu}} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{G}{1 + \frac{1}{\mu}} = \frac{1200}{1 + \frac{1}{0,5}} = 400 \text{ N}$$

$$K_x = \frac{G}{1 + \frac{1}{\mu}}$$

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = K_x \sqrt{2}$$

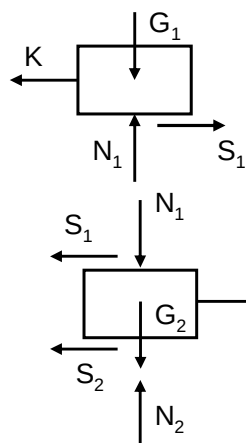
8. példa



Mekkora F erővel lehet az alsó téglát megmozdítani?

Egy téglát súlya $G=25\text{N}$

A súrlódási tényezők: $\mu_1=0,4$, $\mu_2=0,3$



$$G_1 - N_1 = 0$$

$$N_1 = G_1 = 25 \text{ N}$$

$$K - S_1 = 0$$

$$K = 10 \text{ N}$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

$$S_1 = 0,4 \cdot 25 = 10 \text{ N}$$

$$N_1 + G_1 - N_2 = 0$$

$$N_2 = 50 \text{ N}$$

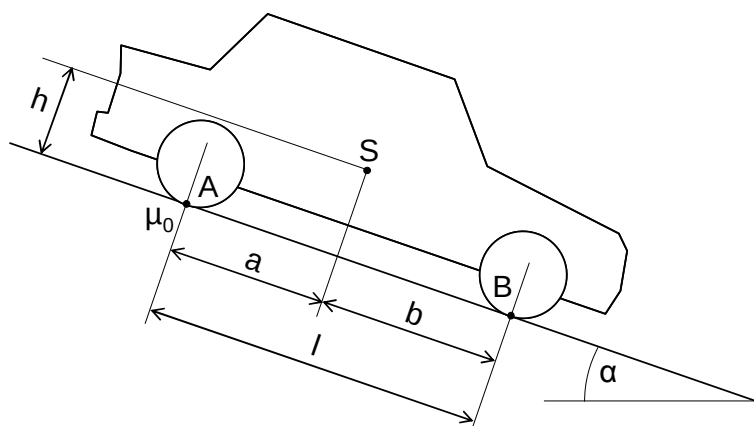
$$S_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

$$S_2 = 0,3 \cdot 50 = 15 \text{ N}$$

$$S_1 + S_2 - F = 0$$

$$F = S_1 + S_2 = 25 \text{ N}$$

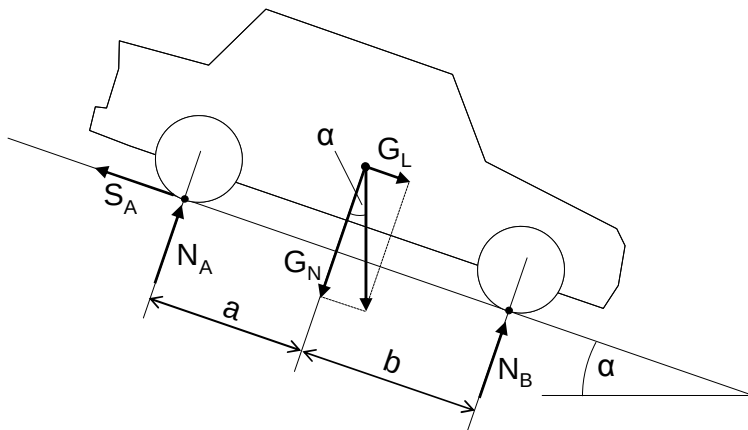
9. példa



A gépkocsit csak a hátsó tengelynél fékezzük be. Milyen $\alpha_{\max}$ esetén marad nyugalomban?

A gördülési ellenállás elhanyagolható.

Adott: $a, b, l, h, \mu_0, G, \alpha$



$$G_N = G \cos \alpha$$

$$G_L = G \sin \alpha$$

$$S_A = \mu_0 \cdot N_A$$

Lejtő irányú erők egyensúlya

$$S_A - G_L = 0$$

$$S_A = G_L = G \sin \alpha$$

$$\sum M_A = 0$$

$$G_N \cdot a + G_L \cdot h - N_B \cdot l = 0$$

$$N_B = \frac{G_N \cdot a + G_L \cdot h}{l} = \frac{a \cdot G \cos \alpha + h \cdot G \sin \alpha}{l}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$N_A \cdot l + G_L \cdot h - G_N \cdot b = 0$$

$$N_A = \frac{-h \cdot G \sin \alpha + b \cdot G \cos \alpha}{l}$$

$$\mu_0 \frac{b \cdot G \cos \alpha - h \cdot G \sin \alpha}{l} = G \sin \alpha$$

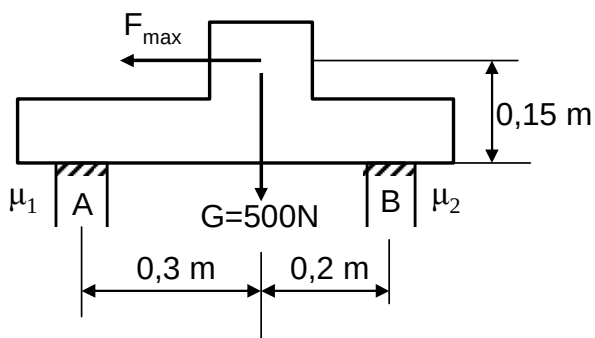
$$\mu_0 \cdot b \cdot G \cos \alpha - \mu_0 \cdot h \cdot G \sin \alpha = l \cdot G \sin \alpha$$

$$\mu_0 \cdot b \cdot G \cos \alpha = l \cdot G \sin \alpha + \mu_0 \cdot h \cdot G \sin \alpha = \sin \alpha (l \cdot G + \mu_0 \cdot h \cdot G)$$

$$= \frac{b \cdot \mu_0 \cdot G}{l \cdot G + \mu_0 \cdot h \cdot G} = \frac{\mu_0 \cdot b}{l + \mu_0 \cdot h} = \tan \alpha$$

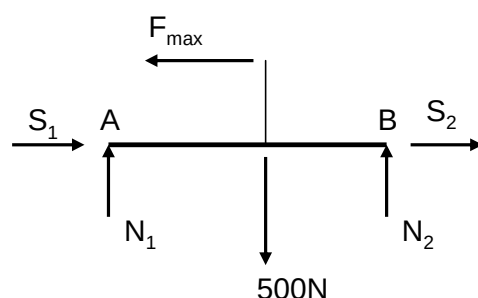
Az előzőekben számított szög az a maximális szög, melynél a gépjármű nem csúszik meg.

10. példa



Mekkora F_{max} erőt működtethetünk, hogy még éppen egyensúly legyen?

A súrlódási tényezők: $\mu_1=0,1$, $\mu_2=0,2$



$$\sum X_i = 0 \quad S_1 + S_2 - F_{max} = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad N_1 - 500 + N_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{max} \cdot 0,15 - 500 \cdot 0,3 + N_2 \cdot 0,5 = 0$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1 \quad S_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

$$F_{\max} = S_1 + S_2 = \mu_1 \cdot N_1 + \mu_2 \cdot N_2 = \mu_1(-N_2 + 500) + \mu_2 \cdot N_2$$

$$N_2 = \frac{500 \cdot 0,3 - 0,15 \cdot F_{\max}}{0,5} = 1000 \cdot 0,3 - 0,3 \cdot F_{\max}$$

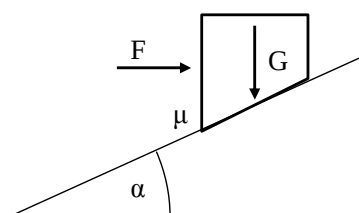
$$F_{\max} = \mu_1 \cdot 500 - \mu_1 \cdot N_2 + \mu_2 \cdot N_2 = \mu_1 \cdot 500 - N_2(\mu_1 - \mu_2)$$

$$F_{\max} = 50 - (300 - 0,3 \cdot F_{\max})(\mu_1 - \mu_2)$$

$$F_{\max} = 50 + 30 - 0,03 \cdot F_{\max}$$

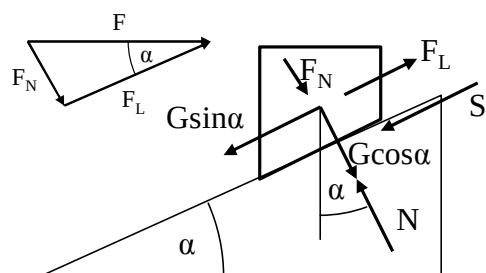
$$F_{\max} = \frac{80}{1,03} = 77,67 \text{ N}$$

11. példa



Mekkora lehet $F_{\max}$ értéke, hogy még éppen ne induljon meg a test felfelé?

Adott: $\alpha = 30^\circ$ $\mu = 0,2$ $G = 800 \text{ N}$



$$F_L - G \sin \alpha - S = 0$$

$$F_L = F \cos \alpha$$

$$F_N + G \cos \alpha - N = 0$$

$$F_N = F \sin \alpha$$

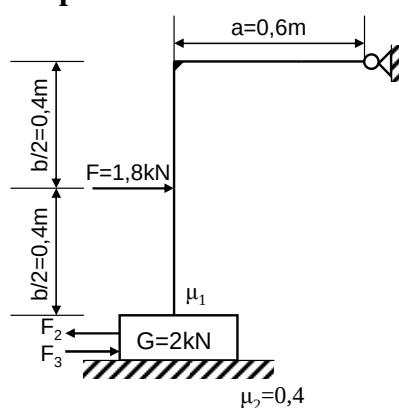
$$F_L = G \sin \alpha + S = G \sin \alpha + \mu \cdot N = G \sin \alpha + \mu(F \sin \alpha + G \cos \alpha)$$

$$F \cos \alpha = G \sin \alpha + \mu \cdot F \sin \alpha + \mu \cdot G \cos \alpha$$

$$F(\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) = G \sin \alpha + \mu \cdot G \cos \alpha$$

$$F = \frac{G \sin \alpha + \mu \cdot G \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} = \frac{G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha} = \frac{800 \left(0,5 + 0,2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,2 \cdot 0,5} = 703 \text{ N}$$

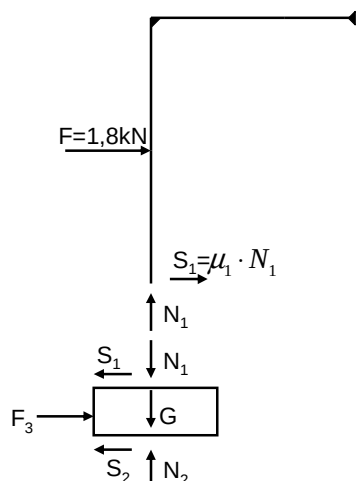
12. példa



a, Mekkora F_3 erővel lehet a G_1 súlyú testet az elmozdulás határhelyzetébe hozni, ha $\mu_1 = 0,2$?
Mekkora b értéknél lenne önzáró ($b = ?$)?

b, Mekkora F_2 erővel lehet a G súlyú testet az elmozdulás határhelyzetébe hozni, ha $\mu_1 = 0$?

a,



$$F \cdot \frac{b}{2} + \mu_1 N_1 \cdot b - N_1 a = 0$$

$$N_1 = \frac{\frac{F \cdot b}{2}}{a - \mu_1 b} = \frac{720}{0,44} \approx 1636 \text{ N}$$

$$N_2 = N_1 + G \approx 3636 \text{ N}$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1 = 1454,4 \text{ N}$$

$$S_2 = \mu_2 \cdot N_2 = 327,2 \text{ N}$$

$$F_3 = S_1 + S_2 = 1781,6 \text{ N}$$

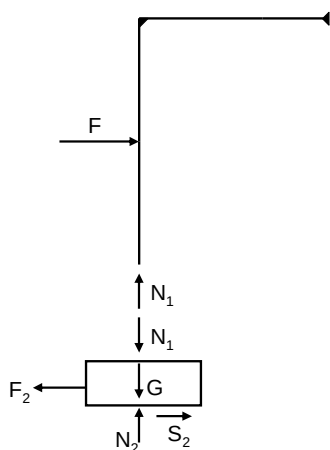
Önzárás

$$\text{Ha } N_1 \rightarrow \infty \Rightarrow a - \mu_1 \cdot b = 0$$

$$a - \mu_1 b = 0$$

$$b = \frac{a}{\mu_1} = \frac{0,6}{0,2} = 3 \text{ m vagy nagyobb}$$

b,



$$F \frac{b}{2} - N_1 \cdot a = 0$$

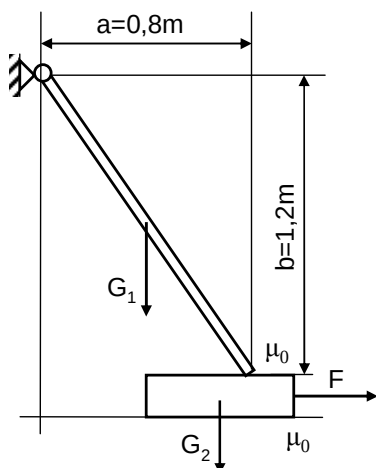
$$N_1 = \frac{Fb}{2a}$$

$$N_2 = N_1 + G = \frac{Fb}{2a} + G$$

$$S_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

$$F_2 = S_2 = \mu_2 \left(\frac{Fb}{2a} + G \right) = 0,4 \left(\frac{1800 \cdot 0,8}{2 \cdot 0,6} + 2000 \right) = 1280 \text{ N}$$

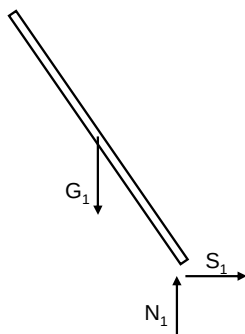
13. példa



Mekkora F erővel lehet a $G_1=450\text{N}$ súlyú rúd alsó vége alatt levő deszkalapot megmozdítani?

A deszkalap súlya: $G_2=60\text{N}$

A nyugvásbeli súrlódási tényező $\mu_0 = \frac{1}{3}$



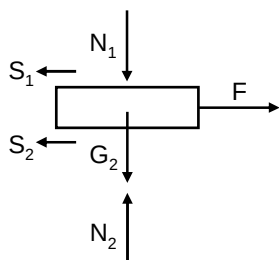
Írjuk fel a rúdra ható erők nyomatékát a csuklópontra.

$$G_1 \frac{a}{2} - N_1 a - S_1 b = 0$$

A határhelyzetben $S_1 = \mu_0 \cdot N_1$

$$450 \cdot 0,4 - 0,8 \cdot N_1 - \frac{1}{3} \cdot N_1 \cdot 1,2 = 0$$

$$N_1 = 150 \text{ N} \text{ illetve } S_1 = 50 \text{ N}$$



$$N_1 + G_2 - N_2 = 0$$

$$N_2 = 210 \text{ N}$$

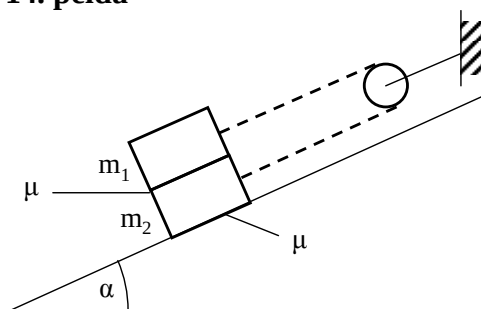
$$S_2 = \mu \cdot N_2$$

$$S_2 = 70 \text{ N}$$

$$S_1 + S_2 - F = 0$$

$$F = S_1 + S_2 = 120 \text{ N}$$

14. példa

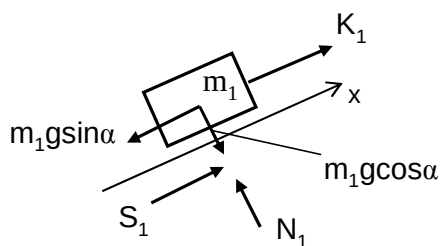


Mekkora legyen α szög értéke, hogy a testek még éppen nyugalomban legyenek?

$$m_1 = 50 \text{ kg} \quad m_2 = 25 \text{ kg}$$

$$\mu = 0,15$$

A határhelyzet elérése után az m_1 tömegű test lefelé mozdulna meg.



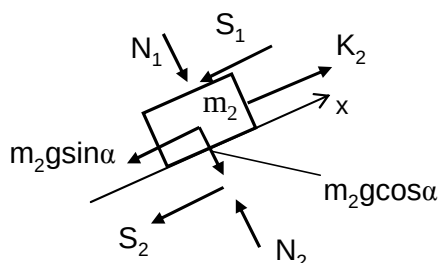
$$\sum X_i = 0$$

$$S_1 + K_1 - m_1 g \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$$

$$S_1 = \mu \cdot N_1$$



$$\sum X_i = 0$$

$$m_2 g \sin \alpha + S_2 + S_1 - K_2 = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$N_1 + m_2 g \cos \alpha - N_2 = 0$$

$$S_2 = \mu \cdot N_2$$

Feltétel: $K_1 = K_2$

$$K_1 = m_1 g \sin \alpha - S_1$$

$$K_2 = m_2 g \sin \alpha + S_1 + S_2$$

$$K_1 = m_1 g \sin \alpha - \mu \cdot N_1$$

$$K_2 = m_2 g \sin \alpha + \mu \cdot m_1 g \cos \alpha + S_2$$

$$K_1 = m_1 g \sin \alpha - \mu \cdot m_1 g \cos \alpha$$

$$N_2 = N_1 + m_2 g \cos \alpha = m_1 g \cos \alpha + m_2 g \cos \alpha$$

$$K_2 = m_2 g \sin \alpha + \mu \cdot m_1 g \cos \alpha + \mu \cdot m_1 g \cos \alpha + \mu \cdot m_2 g \cos \alpha$$

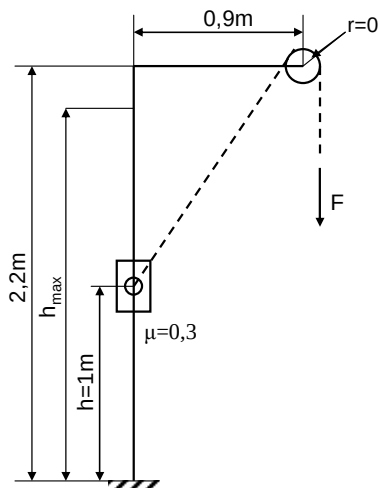
$$m_1 g \sin \alpha - \mu \cdot m_1 g \cos \alpha = m_2 g \sin \alpha + \mu \cdot m_1 g \cos \alpha + \mu \cdot m_1 g \cos \alpha + \mu \cdot m_2 g \cos \alpha$$

$$\sin \alpha (m_1 g - m_2 g) = \cos \alpha (3m_1 g \mu + \mu \cdot m_2 g)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mu(3m_1 + m_2)}{m_1 - m_2} = \frac{0,15 \cdot (150 + 25)}{25} = 1,05$$

$$\alpha = 46,4^\circ$$

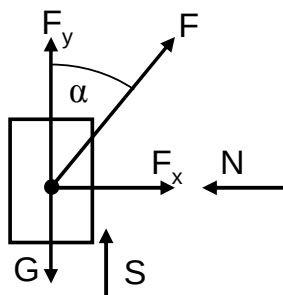
15. példa



Határozza meg azt a tartományt, amelybe az F érték bele kell, hogy essék, hogy a G súlyú test az adott helyen nyugalomban maradjon.

Elméletileg milyen magasra tudjuk felhúzni a súlyt, ha tetszés szerint növelhetjük F nagyságát?

A lecsúszás határhelyzetében



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,9}{1,2} = 36,87^\circ$$

$$F_y + S - G = 0 \quad F_y = F \cos \alpha$$

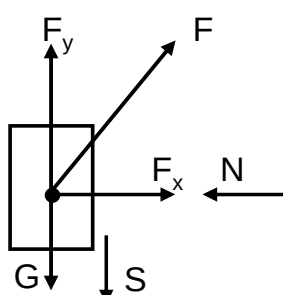
$$N - F_x = 0 \quad F_x = F \sin \alpha$$

$$S = \mu \cdot N$$

$$F \cos \alpha + \mu \cdot F \sin \alpha - G = 0$$

$$F \geq \frac{G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

A felfelé való elmozdulás határhelyzetében



$$F_y - S - G = 0$$

$$N - F_x = 0$$

$$S = \mu \cdot N$$

$$F \cos \alpha - \mu \cdot F \sin \alpha - G = 0$$

$$F \leq \frac{G}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

Ha $\cos \alpha - \mu \sin \alpha = 0$ akkor önzárás jön létre és $F = \infty$

$$\cos \alpha - \mu \sin \alpha = 0$$

$$\frac{1}{\mu} = \operatorname{tg} \alpha$$

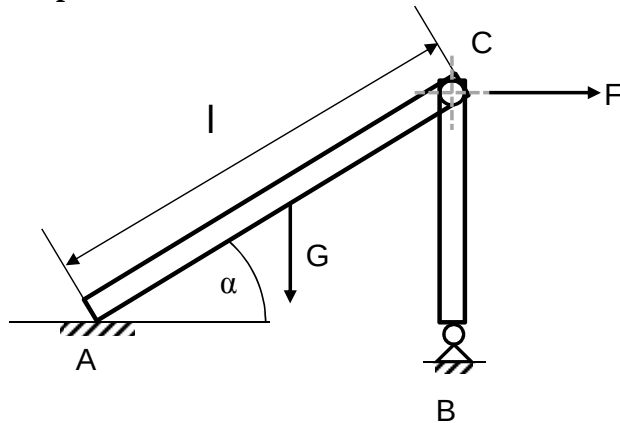
$$\frac{1}{\mu} = \frac{0,9}{2,2 - h_{\max}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,9}{2,2 - h_{\max}}$$

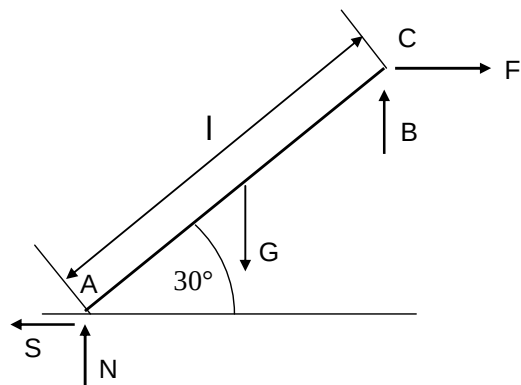
$$2,2 - h_{\max} = \mu \cdot 0,9$$

$$h_{\max} = 1,93 \text{ m}$$

16. példa



Az AC rúd alsó vége érdes felületen támaszkodik, ahol a $\mu=0,3$
Egyensúly esetén mekkora lehet F értéke, ha $\alpha=30^\circ$



$$\sum M_C = 0$$

$$G \cdot \frac{l}{2} \cos 30^\circ - N \cdot l \cos 30^\circ - \mu \cdot N \cdot l \sin 30^\circ = 0$$

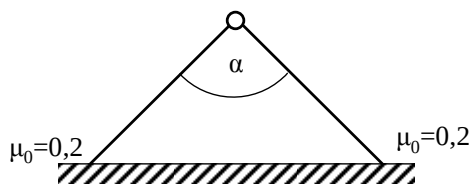
$$\frac{G}{2} \cos 30^\circ - N \cdot (\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ) = 0$$

$$N = \frac{G \cos 30^\circ}{2(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ)}$$

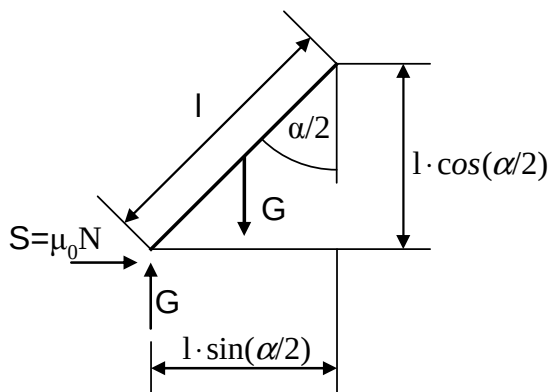
$$\sum X = 0 \quad -S + F = 0$$

$$F = S = \mu \cdot N = \frac{\mu \cdot G (\cos 30^\circ)}{2(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ)} = \frac{129,9}{2,032} = 63,93 \text{ N}$$

17. példa



Mekkora α szögben lehet a létrát kinyitni, hogy ne csússzon szét?
A létra súlya $2G$.



$$\sum M = 0$$

$$G \frac{l}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \mu_0 \cdot G \cdot l \cos \frac{\alpha}{2} - G \cdot l \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

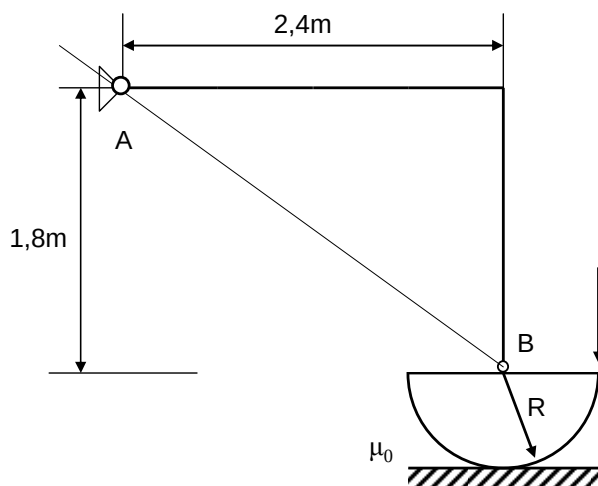
$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2} + \mu_0 \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = -\mu_0 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-\mu_0}{-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0}{\frac{1}{2}} = 2\mu_0$$

$$\frac{\alpha}{2} = 21,8^\circ \rightarrow a = 43,6^\circ$$

18. példa



Mekkora F erővel lehet az érdes síkon fekvő G súlyú félgömböt megindítani?

$$R = 1,2 \text{ m}$$

$$G = 9000 \text{ N}$$

$$\mu_0 = 0,4$$

A tartórúd súlya elhanyagolható!

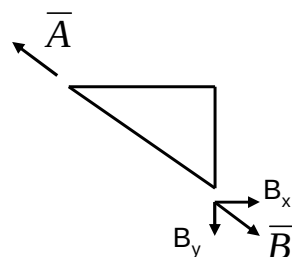
A tehetetlen tört tengelyű rúd csak a csuklóit összekötő egyenes mentén ható erőre lehet egyensúlyban.

Rúd egyensúlya

$$\sum M_A = 0$$

$$B_y \cdot 2,4 - B_x \cdot 1,8 = 0$$

$$B_y = \frac{1,8}{2,4} B_x = \frac{3}{4} B_x$$



A korong egyensúlya

$$\sum M_B = 0$$

$$S \cdot R - F \cdot R = 0$$

$$F = S$$

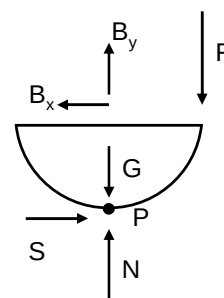
$$\sum M_P = 0$$

$$F \cdot R - B_x \cdot R = 0$$

$$F = B_x$$

$$S = \mu_0 \cdot N$$

$$F = \mu_0 N \rightarrow N = \frac{F}{\mu_0}$$



$$\sum Y_i = 0$$

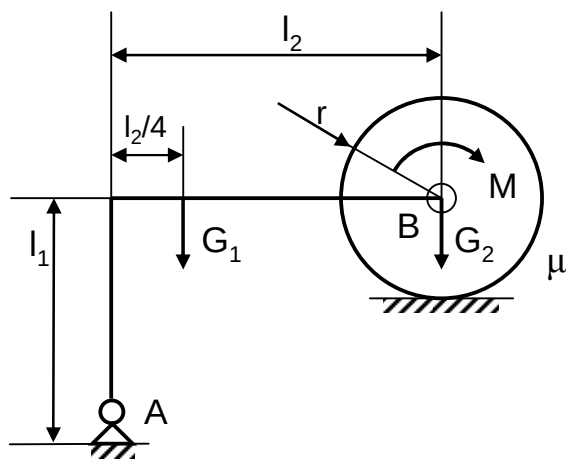
$$B_y + N - G - F = 0$$

$$\frac{3}{4}B_x + \frac{F}{\mu_0} - G - F = 0 \quad \frac{3}{4}F + \frac{F}{\mu_0} - G - F = 0$$

$$F \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{\mu_0} - 1 \right) = G$$

$$F = \frac{G}{\frac{3}{4} + \frac{1}{\mu_0} - 1} = \frac{9000}{0,75 + \frac{1}{0,4} - 1} = \frac{9000}{2,25} = 4000 \text{ N}$$

19. példa



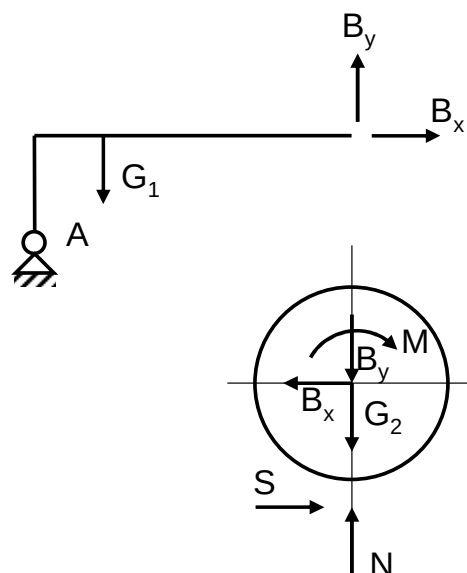
Mekkora M nyomatéknak kell hatnia a kerékre az elfordulás határhelyzetében?

Milyen l_1 méret mellett nem lehet a hengert megforgatni? (Önzárás mikor alakul ki?)

$$l_1 = 0,8 \text{ m} \quad l_2 = 3,2 \text{ m} \quad r = 0,6 \text{ m}$$

$$G_1 = 1600 \text{ N} \quad G_2 = 400 \text{ N} \quad \mu = 0,3$$

A gördülési ellenállás elhanyagolható!



$$\sum M_A = 0$$

$$G_1 \frac{l_2}{4} + B_x l_1 - B_y l_2 = 0$$

A koronghoz tartozó egyensúlyi egyenletek

$$\sum X_i = 0 \quad S - B_x = 0 \quad S = B_x$$

$$\sum Y_i = 0 \quad N - B_y - G_2 = 0$$

$$N = B_y + G_2$$

$$\sum M_B = 0 \quad M - S \cdot r = 0 \quad M = S \cdot r$$

$$S = \mu \cdot N$$

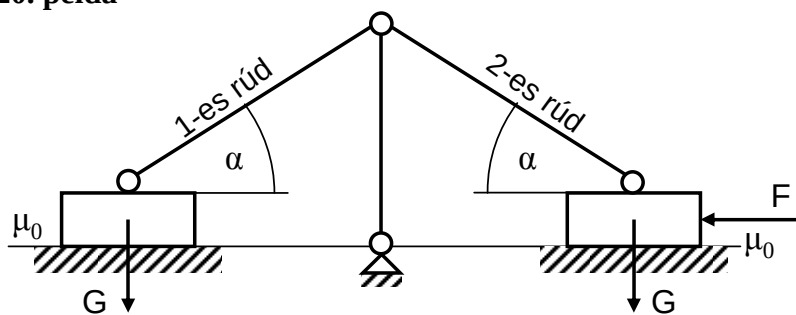
$$\begin{aligned}
 S &= \mu \cdot N = \mu(B_y + G_2) = \mu \left(G_2 + \frac{G_1 \frac{l_2}{4} + B_x l_1}{l_2} \right) = \mu G_2 + \mu \left(\frac{G_1}{4} + B_x \frac{l_1}{l_2} \right) = \\
 &= \mu G_2 + \mu \frac{G_1}{4} + \mu B_x \frac{l_1}{l_2} = \mu G_2 + \mu \frac{G_1}{4} + \mu S \frac{l_1}{l_2} \\
 S \left(1 - \mu \frac{l_1}{l_2} \right) &= \mu G_2 + \mu \frac{G_1}{4} \\
 S \left(\frac{1}{\mu} - \frac{l_1}{l_2} \right) &= G_2 + \frac{G_1}{4} \Rightarrow S = \frac{G_2 + \frac{G_1}{4}}{\frac{1}{\mu} - \frac{l_1}{l_2}} = \frac{800}{3,083} = 259,5 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$M = S \cdot r = 155,7 \text{ Nm}$$

Önzárás akkor alakul ki, amikor a súrlódó erő képletének nevezője nulla.

$$\frac{1}{\mu} - \frac{l_1}{l_2} = 0 \Rightarrow l_1 = \frac{l_2}{\mu} = \frac{3,2}{0,3} = 10,6 \text{ m}$$

20. példa

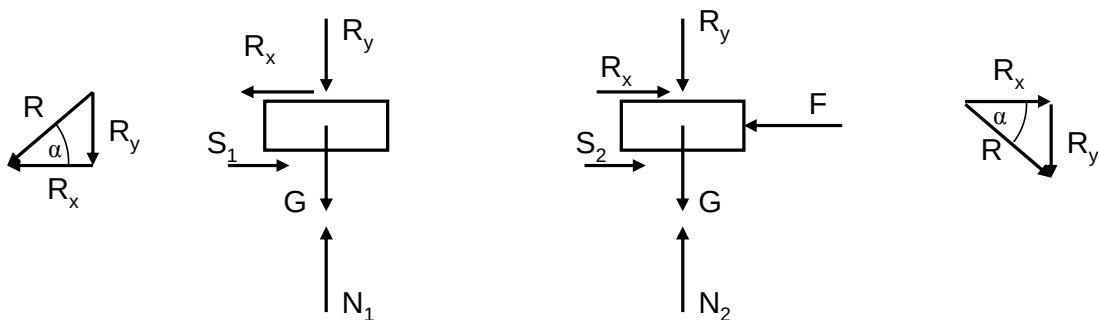


Mekkora α szögnél válik a rendszer önzáróvá?

G és μ_0 adott

A hasábok magassága elhanyagolható!

A középső rúd egyensúlyának feltétele, hogy az 1-es és 2-es rúdban a rúderők azonosak.



$$S_1 = \mu_0 \cdot N_1$$

$$R_x - S_1 = 0$$

$$R_y + G - N_1 = 0$$

$$R \sin \alpha + G - \frac{S_1}{\mu_0} = 0$$

$$R \sin \alpha + G - \frac{R \cos \alpha}{\mu_0} = 0$$

$$R \left(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha}{\mu_0} \right) = -G$$

$$R = \frac{G}{\frac{\cos \alpha}{\mu_0} - \sin \alpha} = \frac{G \mu_0}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha}$$

$$F = \frac{G \mu_0}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha} \cdot (\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha) + \mu_0 G = G \mu_0 \left(1 + \frac{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha} \right)$$

Ha $\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha = 0$ akkor F a végtelenhez tart.

$$\cos \alpha = \mu_0 \sin \alpha$$

$$\frac{1}{\mu_0} = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\mu_0} \right) \text{ Ennél nagyobb } \alpha \text{ szög esetén a rendszer önzáró!}$$

$$R_x + S_2 - F = 0$$

$$R_y + G - N_2 = 0$$

$$S_2 = \mu_0 \cdot N_2$$

$$R_y = R \sin \alpha$$

$$R_x = R \cos \alpha$$

$$F = R_x + S_2 = R \cos \alpha + \mu_0 N_2 =$$

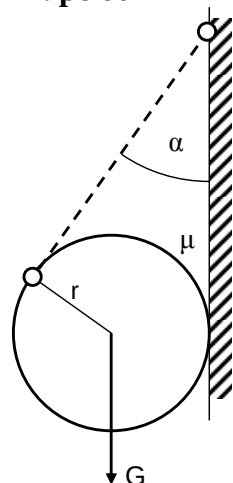
$$= R \cos \alpha + \mu_0 [R_y + G] =$$

$$= R \cos \alpha + \mu_0 [R \sin \alpha + G] =$$

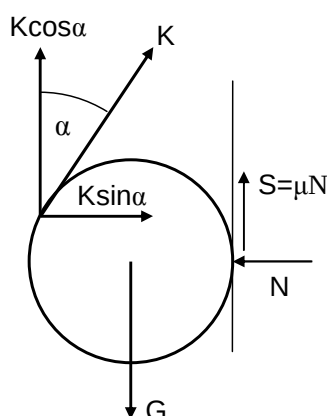
$$= R \cos \alpha + \mu_0 R \sin \alpha + \mu_0 G =$$

$$R(\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha) + \mu_0 G$$

21. példa



G súlyú, r sugarú koronghoz kapcsolt kötél végét a függőleges falhoz rögzítjük. Határozzuk meg a nyugalmi állapotot biztosító μ súrlódási tényező értékét, ha α, r és G értékei ismertek!



$$\sum M_0 = 0$$

$$K \cdot r - S \cdot r = K \cdot r - \mu \cdot N \cdot r = 0$$

$$K = \mu \cdot N$$

$$\sum X_i = 0$$

$$K \sin \alpha - N = 0$$

$$N = K \sin \alpha$$

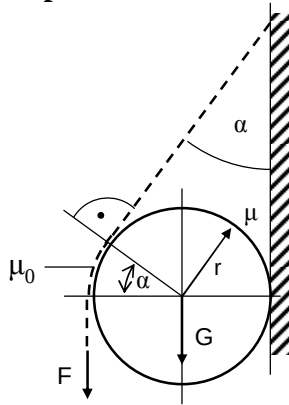
$$\sum Y_i = 0$$

$$K \cos \alpha - G + \mu \cdot N = 0$$

$$K = \mu \cdot N \rightarrow \mu = \frac{K}{N}$$

$$\mu = \frac{K}{N} = \frac{K}{K \sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

22. példa

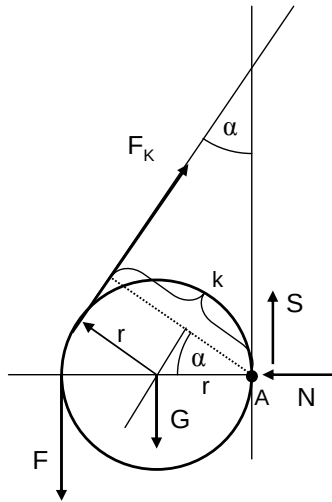


Mekkora az a minimális F erő, ahol a korong nem csúszik le.
Mekkora a minimális μ az egyensúly biztosításához?

$$\alpha = 30^\circ$$

$$G = 1000 \text{ N}$$

$$\mu_0 = 0,3$$



$$F_K = F \cdot e^{\mu_0 \alpha}$$

$$k = r + r \cos \alpha = r(1 + \cos \alpha)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$F_K \cdot k - F \cdot 2 \cdot r - G \cdot r = 0$$

$$F \cdot e^{\mu_0 \alpha} \cdot k - F \cdot 2 \cdot r - G \cdot r = 0$$

$$F [e^{\mu_0 \alpha} \cdot r(1 + \cos \alpha) - 2r] - G \cdot r = 0$$

$$F [e^{\mu_0 \alpha} (1 + \cos \alpha) - 2] = G$$

$$F = \frac{G}{e^{\mu_0 \alpha} (1 + \cos \alpha) - 2} = 5457 \text{ N}$$

$$F_K = 6385 \text{ N}$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$F_K \cos \alpha - F - G + S = 0$$

$$S = F + G - F_K \cos \alpha$$

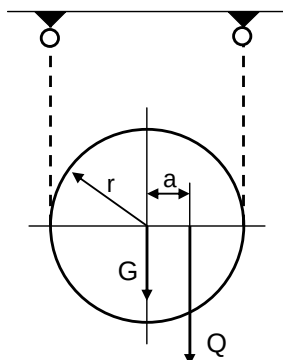
$$\sum X_i = 0$$

$$F_K \sin \alpha - N = 0$$

$$N = F_K \sin \alpha$$

$$\mu = \frac{S}{N} = \frac{F + G - F_K \cos \alpha}{F_K \sin \alpha} = 0,29$$

23. példa



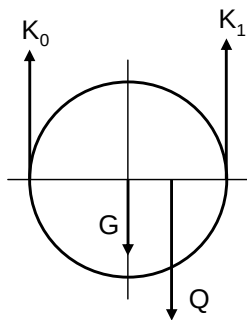
Mekkora Q értéknél csúszik meg a korong?

$$r = 0,5 \text{ m}$$

$$a = 0,25 \text{ m}$$

$$G = 1000 \text{ N}$$

$$\mu = 0,1$$



$$K_1 = K_0 \cdot e^{\mu\alpha}$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$K_0 + K_1 - G - Q = 0$$

$$\sum M = 0$$

$$K_0(r+a) - K_1(r-a) - G \cdot a = 0$$

$$Q = G - K_0 - K_1 = G - K_0 - K_0 \cdot e^{\mu\alpha} = G - K_0(1 + e^{\mu\alpha})$$

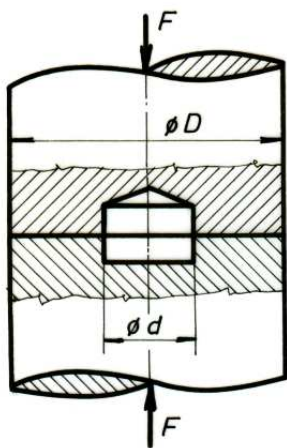
$$K_0 \cdot r + K_0 \cdot a - K_0 \cdot e^{\mu\alpha} \cdot r + K_0 \cdot e^{\mu\alpha} \cdot a - G \cdot a = 0$$

$$K_0(r+a-r \cdot e^{\mu\alpha} + a \cdot e^{\mu\alpha}) = G \cdot a$$

$$K_0 = \frac{G \cdot a}{r+a-r \cdot e^{\mu\alpha} + a \cdot e^{\mu\alpha}} = \frac{1000 \cdot 0,25}{0,5+0,25-0,5 \cdot e^{0,1 \cdot \pi} + 0,25 \cdot e^{0,1 \cdot \pi}}$$

$$K_0 = 613,2 \text{ N}$$

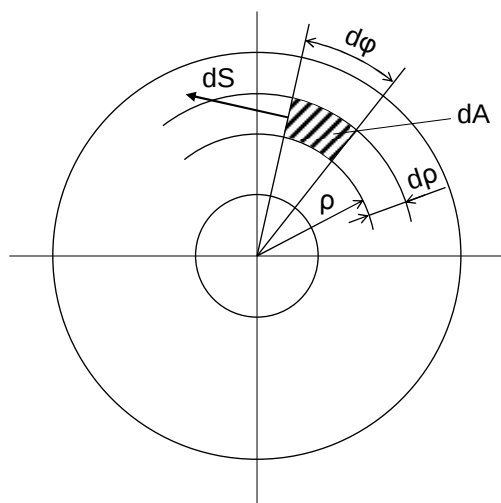
24. példa



Az ábrán látható két rúdvéget összeszorító erő $F=6000\text{N}$. A rúdvégek között a súrlódási tényező $\mu=0,08$. Mekkora nyomtérkkel lehet a rúdvégeket az elcsúszás határhelyzetébe hozni?

$$D=0,22\text{m}$$

$$d=0,1\text{m}$$



$$dA = \rho \cdot d\phi \cdot d\rho$$

$$dN = p \cdot dA$$

$$p = \frac{F}{(R^2 - r^2)\pi}$$

$$dS = \mu \cdot dN$$

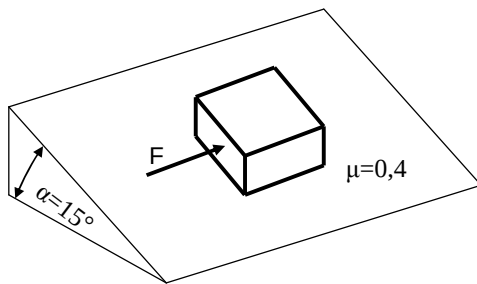
$$dM = \rho \cdot dS = \rho \cdot \mu \cdot dN = \rho \cdot \mu \cdot p \cdot dA = \rho \cdot \mu \cdot p \cdot \rho \cdot d\phi \cdot d\rho$$

$$M = \int_{(T)} dM = \mu \frac{F}{(R^2 - r^2)\pi} \int_0^{2\pi} \int_r^R \rho^2 d\rho \cdot d\phi = \mu \frac{F}{(R^2 - r^2)\pi} \cdot \int \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_r^R d\phi =$$

$$= \mu \frac{F}{(R^2 - r^2)\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{R^3 - r^3}{3} d\phi = \mu \frac{F}{(R^2 - r^2)\pi} \left(\frac{R^3 - r^3}{3} \right) 2\pi =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot F \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{2}{3} \cdot 0,08 \cdot 6000 \cdot \frac{0,11^3 - 0,05^3}{0,11^2 - 0,05^2} = 40,2 \text{ Nm}$$

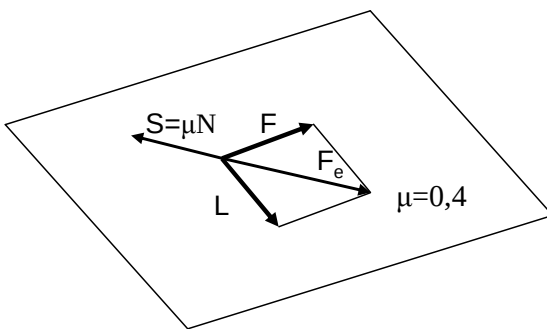
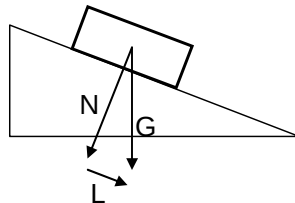
25. példa



Mekkora oldalirányú vízszintes erővel lehet a lejtőn álló $G=100\text{N}$ súlyú testet megmozdítani?

$$N = G \cos \alpha$$

$$L = G \sin \alpha$$



$$\sqrt{F^2 + L^2} = \mu \cdot N$$

$$\sqrt{F^2 + G^2 \sin^2 \alpha} = \mu \cdot G \cos \alpha$$

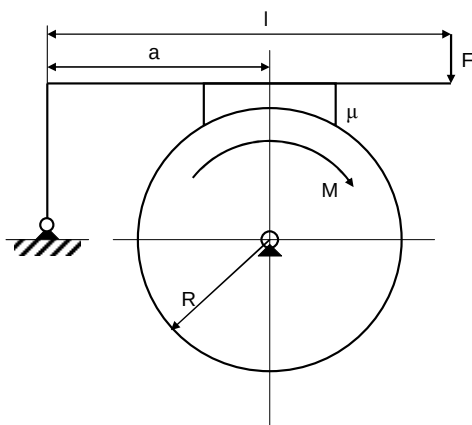
$$F^2 + G^2 \sin^2 \alpha = \mu^2 \cdot G^2 \cos^2 \alpha$$

$$F^2 = G^2 (\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$$F = G \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

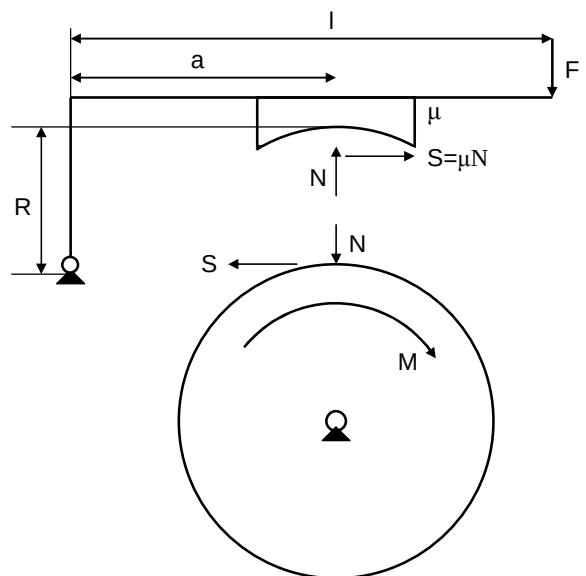
$$F = 100 \cdot \sqrt{0,4^2 \cdot \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = 100 \cdot 0,2869 = 28,69 \text{ N}$$

26. példa



Mekkora M nyomatékkal hozható a dob az elfordulás határhelyzetébe?

Adott a, l, R, μ és F



A rúdra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M = 0$$

$$F \cdot l + \mu \cdot N \cdot R - N \cdot a = 0$$

$$N(a - \mu \cdot R) = F \cdot l$$

$$N = \frac{F \cdot l}{(a - \mu \cdot R)}$$

$$S = \mu \cdot N$$

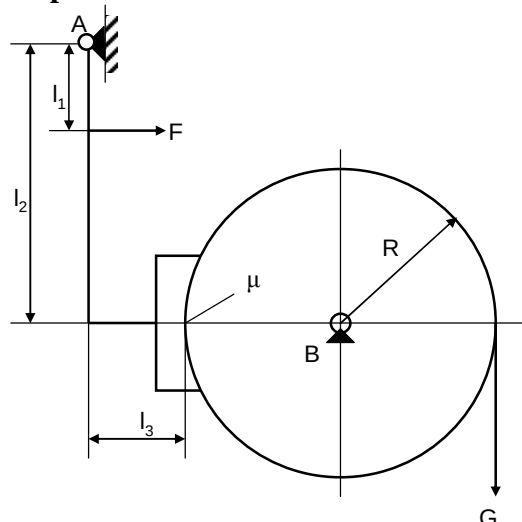
A korongra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M = 0$$

$$S \cdot R - M = 0$$

$$M = \mu \cdot N \cdot R = \mu \cdot R \frac{F \cdot l}{(a - \mu \cdot R)}$$

27. példa



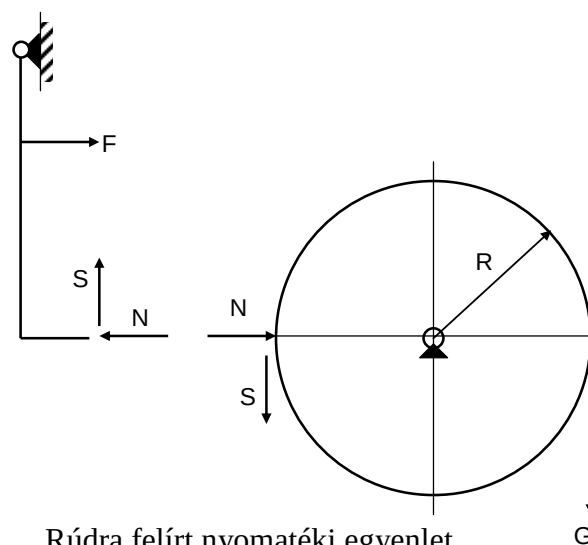
Mekkora F erőt kell működtetni, hogy a rendszer egyensúlyban legyen?

$$l_1 = 0,1\text{m} \quad l_2 = 0,3\text{m} \quad l_3 = 0,08\text{m}$$

$$R = 0,08\text{m}$$

$$G = 500\text{N}$$

$$\mu = 0,4$$



Korongra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M_B = 0$$

$$G \cdot R - S \cdot R = 0$$

$$S = G$$

$$F = \frac{-G \cdot l_3 + \frac{G}{\mu} \cdot l_2}{l_1} = \frac{335}{0,1} = 3350\text{N}$$

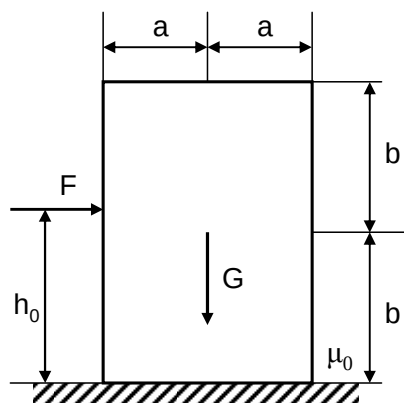
Rúdra felírt nyomatéki egyenlet

$$\sum M_A = 0$$

$$F \cdot l_1 + S \cdot l_3 - N \cdot l_2 = 0$$

$$F \cdot l_1 + S \cdot l_3 - \frac{S}{\mu} \cdot l_2 = 0$$

28. példa



A G súlyú test érdes felületen áll. Minimálisan mekkora magasságban működtessük az F erőt, hogy a test megbillenjen?

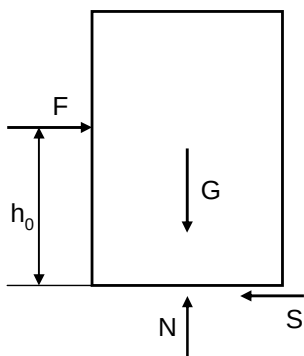
Mekkora a megmozdításhoz szükséges minimális erő?

$$a = 1\text{m}$$

$$b = 3\text{m}$$

$$G = 10000\text{N}$$

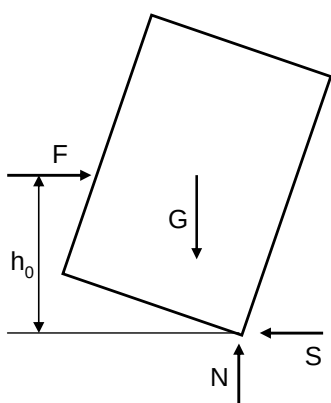
$$\mu_0 = 0,4$$



Bizonyos magasság alatt működtetett F erő hatására a test elcsúszik.

$$\text{Ekkor } F = S = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot G$$

$$\text{vagyis } F = 0,4 \cdot 10000 = 4000 \text{ N}$$



Egy h_0 magasság elérésekor a test a billenés határhelyzetébe jut

$$\sum X_i = 0 \quad F = S$$

$$F \cdot h_0 - G \cdot a = 0$$

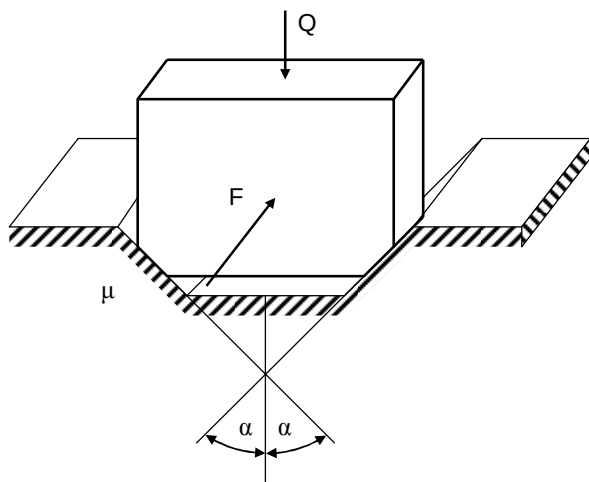
$$\mu_0 \cdot G \cdot h_0 = G \cdot a$$

$$\mu_0 \cdot h_0 = a$$

$$h_0 = \frac{a}{\mu_0}$$

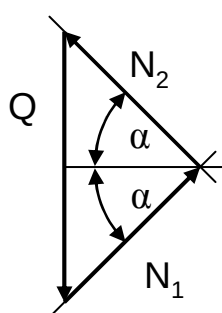
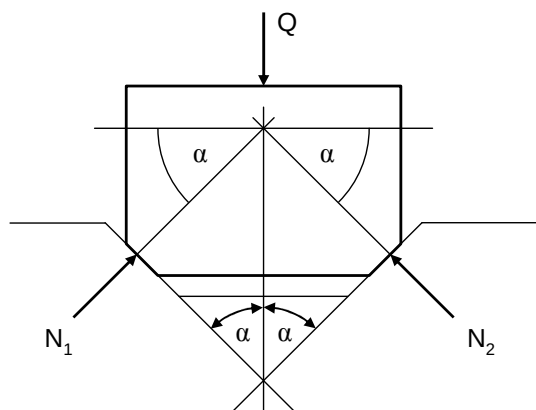
Ezen magasság felett a test megbillen, alatta megcsúszik és súrlódva halad!

29. példa



Mekkora F erővel mozgítható el az ék az ékhoronyban?

Adott: Q, μ, α



$$|\bar{N}_1| = |\bar{N}_2|$$

$$|\bar{N}_1| \sin \alpha = \frac{Q}{2}$$

$$N = |\bar{N}_1| = |\bar{N}_2| = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$$

A súrlódási erő $S_1 = S_2 = \mu \cdot N$.

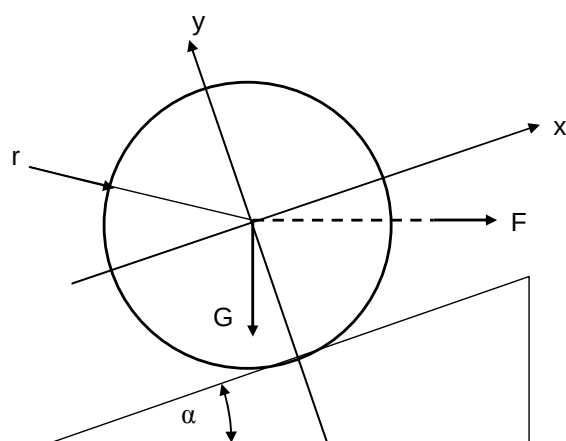
Egyensúlyi egyenleteket az F irányban felírva

$$F = S_1 + S_2 = \mu(N + N) = \mu \cdot 2N = \frac{2\mu \cdot Q}{2 \sin \alpha} = \frac{\mu \cdot Q}{\sin \alpha}$$

Vezessük be $\mu' = \frac{\mu}{\sin \alpha} \rightarrow F = \mu' Q$

Ha az α szöget növeljük, akkor vele együtt az F erő csökken, az α szög csökkentésével az F erő nő!

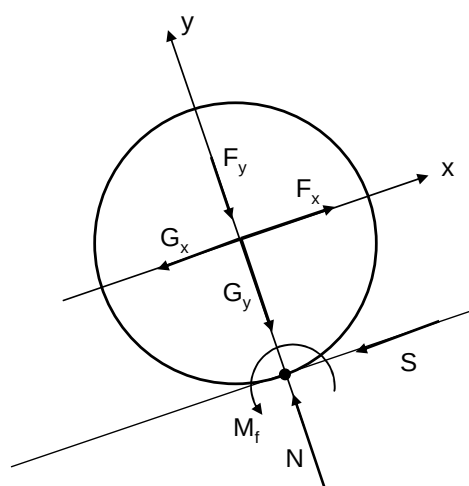
30. példa



Mekkora erővel hozható az ábrán vázolt korong a lejtőn a felfelé való elmozdulás határhelyzetébe, ha a gördülési ellenállás karja $f=2,5\text{mm}$?

Mekkora minimális súrlódási tényező szükséges ahhoz, hogy a korong a lejtőn ne csússzon meg?

$G=100\text{N} \quad r=0,4\text{m} \quad \alpha=30^\circ$



$\sum M = 0$ (az érintkezési pontra)

$G_x \cdot r - F_x \cdot r + M_f = 0$

$G_x = G \sin \alpha \quad G_y = G \cos \alpha$

$F_x = F \cos \alpha \quad F_y = F \sin \alpha$

$M_f = f \cdot N$

$\sum Y_i = 0$

$-G_y - F_y + N = 0$

$\sum X_i = 0$

$-G_x - S + F_x = 0$

A $\sum M = 0$ és $\sum Y_i = 0$ egyenletek felhasználásával

$G \sin 30^\circ \cdot r - F \cos 30^\circ \cdot r + f(G \cos 30^\circ + F \sin 30^\circ) = 0$

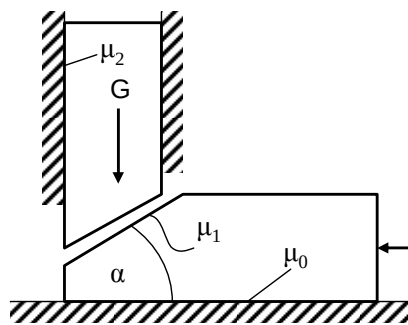
$$F = \frac{G \sin 30^\circ \cdot r + G \cdot f \cos 30^\circ}{r \cos 30^\circ - f \sin 30^\circ} = \frac{100 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 100 \cdot 0,0025 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{0,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,0025 \cdot 0,5} = 58,195 \text{ N}$$

A $\sum X_i = 0$ egyenletből a szükséges súrlódási erő

$S = F_x - G_x = 50,4 - 50 = 0,4 \text{ N}$

A minimális súrlódási tényező $\mu = \frac{S}{N} = \frac{0,4}{115,7} = 0,0035$

31. példa

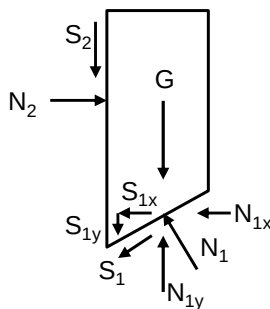


Határozza meg F értékét úgy, hogy a G súlyú test a fölfelé való elmozdulás határhelyzetébe kerüljön!

Az F erővel terhelt éket súlytalannak tekintjük!

$$\mu_0 = 0,1 \quad \mu_1 = 0,15 \quad \mu_2 = 0,2$$

$$G = 1000 \text{ N} \quad \alpha = 15^\circ$$



$$S_0 = \mu_0 \cdot N_0$$

$$S_1 = \mu_1 \cdot N_1$$

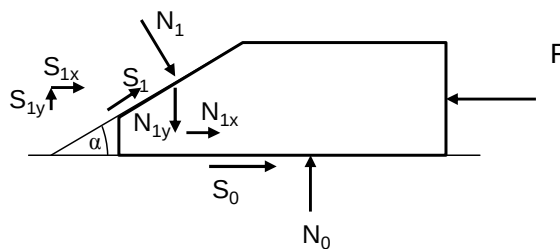
$$S_2 = \mu_2 \cdot N_2$$

$$N_{1x} = N_1 \sin \alpha$$

$$N_{1y} = N_1 \cos \alpha$$

$$S_{1x} = N_1 \mu_1 \cos \alpha$$

$$S_{1y} = N_1 \mu_1 \sin \alpha$$



Egyensúlyi egyenletek:

$$N_2 - S_{1x} - N_{1x} = 0$$

$$\mu_2 N_2 + G + S_{1y} - N_{1y} = 0$$

$$N_2 - \mu_1 N_1 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0$$

$$\mu_2 N_2 + G + \mu_1 N_1 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha = 0$$

$$S_{1x} + N_{1x} + S_0 - F = 0$$

$$\mu_1 N_1 \cos \alpha + N_1 \sin \alpha + N_0 \mu_0 - F = 0$$

$$S_{1y} - N_{1y} + N_0 = 0$$

$$\mu_1 N_1 \sin \alpha + N_1 \cos \alpha + N_0 = 0$$

$$N_2 = N_1 \sin \alpha + \mu_1 N_1 \cos \alpha$$

$$\mu_2 N_1 \sin \alpha + \mu_1 \mu_2 N_1 \cos \alpha + G + \mu_1 N_1 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha = 0$$

$$N_1 [\mu_2 \sin \alpha + \mu_1 \mu_2 \cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha - \cos \alpha] = -G$$

$$N_1 = \frac{-G}{\mu_2 \sin \alpha + \mu_1 \mu_2 \cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha - \cos \alpha}$$

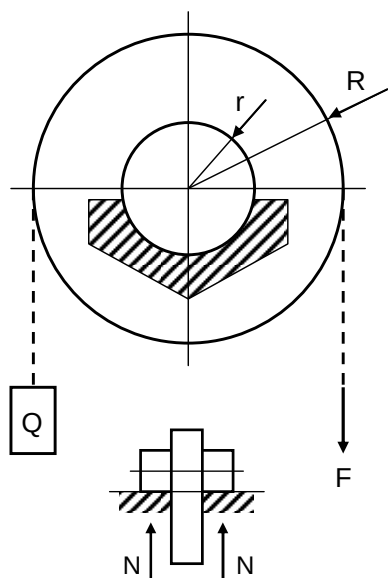
$$N_1 = \frac{-1000}{0,2 \cdot \sin 15^\circ + 0,15 \cdot 0,2 \cdot \cos 15^\circ + 0,15 \cdot \sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

$$N_1 = 1181,53 \text{ N}$$

$$N_0 = N_1 \cos \alpha - \mu_1 N_1 \sin \alpha = 1095,4 \text{ N}$$

$$F = \mu_0 N_0 + N_1 \sin \alpha + \mu_1 N_1 \cos \alpha = 586,5 \text{ N}$$

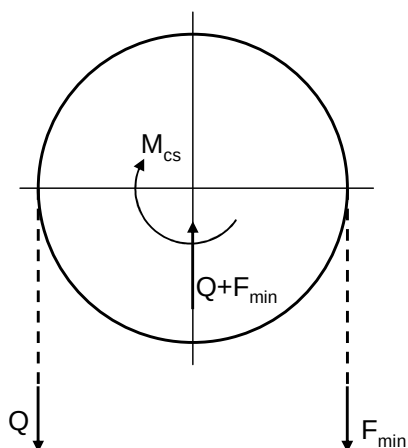
32. példa



Az R sugarú korongra kötelet rögzítünk, úgy, hogy az nem csúszhat meg.

A korongot r sugarú csapon támasztjuk fel, ahol ismerjük a csap súrlódási kör r_0 sugarát. A kötélt egyik végére Q súlyú testet helyezünk.

Határozzuk meg $F_{\min}$ illetve $F_{\max}$ értékét úgy, hogy a korong ne mozduljon meg.



$$M_{cs} = (Q + F_{\min}) \cdot r_0$$

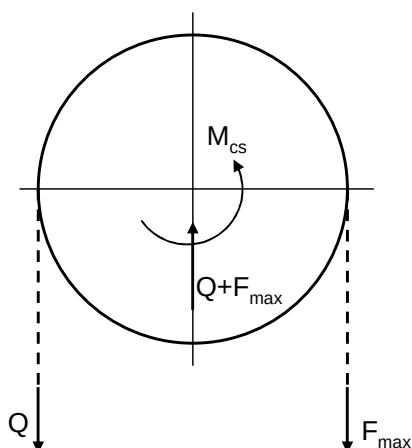
$$\sum M = 0$$

$$Q \cdot R - M_{cs} - F_{\min} \cdot R = 0$$

$$Q \cdot R - Q \cdot r_0 - F_{\min} \cdot r_0 - F_{\min} \cdot R = 0$$

$$F_{\min} (R + r_0) = Q(R - r_0)$$

$$F_{\min} = Q \cdot \frac{R - r_0}{R + r_0}$$



$$M_{cs} = (Q + F_{\max}) \cdot r_0 = 0$$

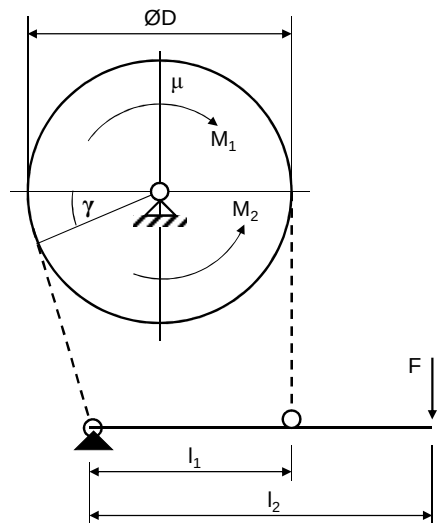
$$\sum M = 0$$

$$Q \cdot R + Q \cdot r_0 + F_{\max} \cdot r_0 - F_{\max} \cdot R = 0$$

$$F_{\max} (r_0 - R) + Q(R + r_0) = 0$$

$$F_{\max} = Q \cdot \frac{R + r_0}{R - r_0}$$

33. példa



Mekkora F erővel lehet megállítani az M_1 illetve M_2 nyomatékkal terhelt korongot?

$D, M_1, M_2, l_1, l_2, \mu, \gamma$

$$K_1 = K_0 \cdot e^{\alpha \cdot \mu}$$

$$\alpha = \pi + \gamma \quad (\text{radián})$$

$$\sum M = 0 \quad (\text{korongra})$$

$$M_1 + K_0 \cdot \frac{D}{2} - K_1 \cdot \frac{D}{2} = 0$$

$$M_1 + K_0 \cdot \frac{D}{2} - K_0 \cdot e^{(\pi + \gamma) \cdot \mu} \cdot \frac{D}{2} = 0$$

$$K_0 = \frac{\frac{2}{D} M_1}{e^{\mu(\pi + \gamma)} - 1}$$

$$\sum M = 0 \quad (\text{tartóra})$$

$$K_0 \cdot l_1 - F \cdot l_2 = 0$$

$$\frac{\frac{2}{D} M_1}{e^{\mu(\pi + \gamma)} - 1} \cdot l_1 - F \cdot l_2 = 0$$

$$F = \frac{\frac{2}{D} M_1}{e^{\mu(\pi + \gamma)} - 1} \cdot \frac{l_1}{l_2}$$

