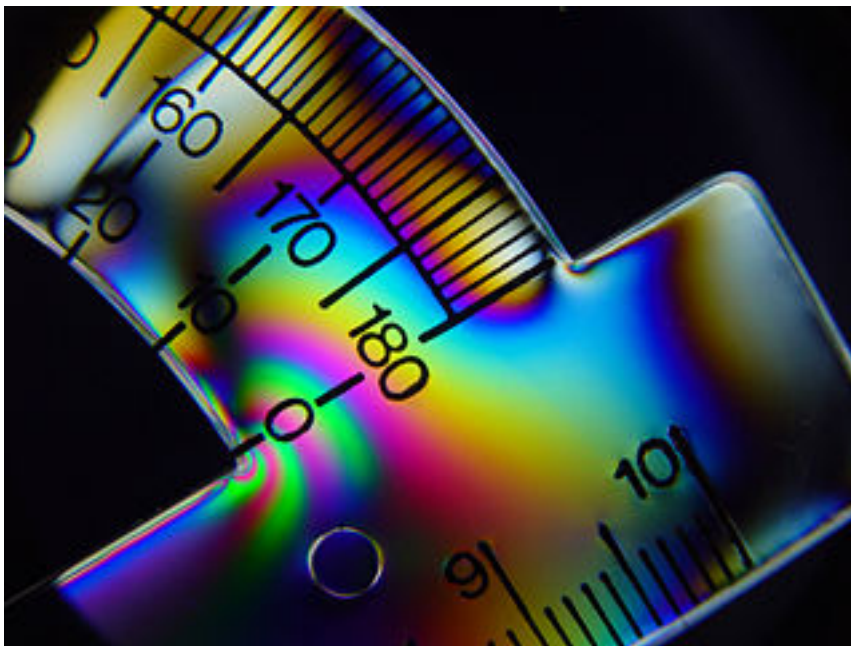

Szilárdságtan példatár



BME

2014. április 22.

A példatár létrejöttében közreműködött Balázs Ágoston, Forberger
Árpád, Galambosi Frigyes, Soós Gábor, Vörös Gábor.

A jelölt ábrák a Creative Commons licenz alapján kerültek
felhasználásra (<http://creativecommons.org/>).

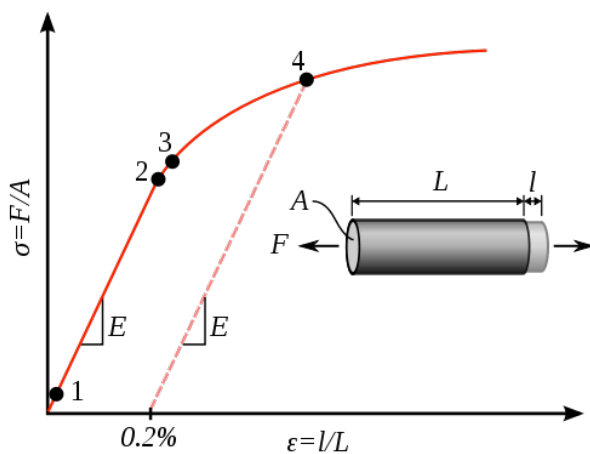
1. Húzás	1
1.1. Összefoglalás	1
2. Hajlítás	55
2.1. Összefoglalás	55
3. Csavarás, nyírás	81
3.1. Összefoglalás	81
4. Összetett igénybevétel	111
5. Feszültség, alakváltozás transzformációja	127
5.1. Összefoglalás	127
6. Deformációszámítás	151
6.1. Összefoglalás	151
7. Kihajlás	205
7.1. Összefoglalás	205
Tárgymutató	232
Jelölések listája	233

TARTALOMJEGYZÉK

1.1. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a deformálható testek alakváltozásával, fajlagos hosszváltozásával foglalkoztunk. Képzeljünk el egy rudat, melynek kezdeti hossza L . Terheljük a hossziránnyal párhuzamos, a keresztmetszet súlypontjában ható koncentrált F erővel. Ennek hatására a hossza megnő, ennek mértéke l .

Egy ilyen deformálható test szakítódíagramja látható az 1.1 ábrán. A különböző

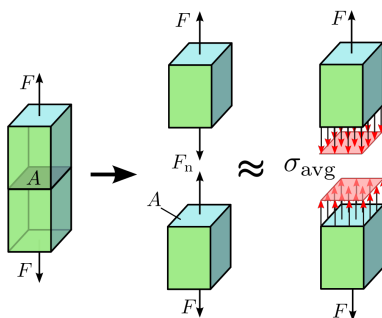


1.1. ábra. Szakítódíagram

1

szakaszok pedig az 1-2 arányossági tartomány, 1-3 a rugalmas tartomány és 4

1. HÚZÁS



1.2. ábra. Feszültség eloszlása

1

a maradó alakváltozás szakasza. Általában ez a pont a 0.2 százaléknyi maradó alakváltozáshoz tartozik. Az arányossági tartományban, kis alakváltozások esetén érvényes az egyszerű Hooke törvény alakja

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \quad (1.1)$$

ahol E a rugalmassági modulusz, ε_z a z irányú fajlagos hosszváltozás. Ez az összefüggés az anyag arányossági tartományáig igaz, 2-ig.

A feszültség eloszlása látható húzó igénybevétel esetén az 1.2 ábrán. Számítása a

$$\sigma_z = \frac{F}{A} \quad (1.2)$$

képlet alapján történik. Mivel ez a keresztmetszetben állandó, ezért a feszültség eloszlása is állandó lesz.

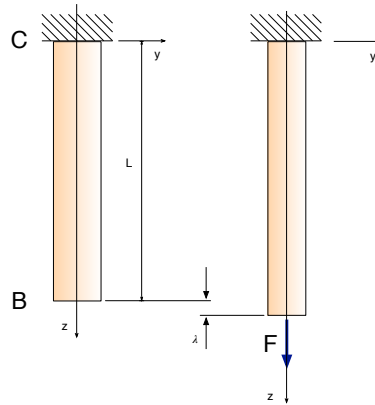
Deformálható testek hosszváltozása számolható adott keresztmetszet A és terhelés F esetén. A 1.3 ábrán adott terhelés F esetén a deformáció

$$\lambda = \frac{FL}{AE} \quad (1.3)$$

alapján számolható.

Amennyiben a rúd több pontban terhelt vagy különböző keresztmetszetű részekből áll vagy különböző anyagokból készült akkor az egyes részek részdeformációjából

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \frac{F_i L_i}{A_i E_i} \quad (1.4)$$



1.3. ábra. Hosszváltozás

adódik a teljes hosszváltozás.

Ha a terhelés nem állandó vagy a keresztmetszet változik akkor (1.3) helyett

$$\lambda = \int_0^L \frac{F(z)}{A(z)E} dz \quad (1.5)$$

használandó.

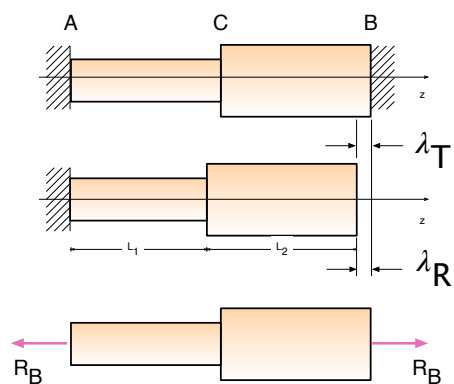
Statikailag határozatlan feladatok esetén a szabad test ábra alapján felírt egyensúlyi egyenletek száma nem elegendő a reakciók számításához. Ilyenkor a geometria alapján írjuk fel a szükséges kiegészítő egyenleteket (lásd drótok megnyúlása). Máskor először határozottá tesszük a szerkezetet majd így számolunk deformációt. Ez lehet erő által okozott, mint (1.3) egyenlet vagy hőmérséklet által

$$\lambda = \alpha L \Delta T \quad (1.6)$$

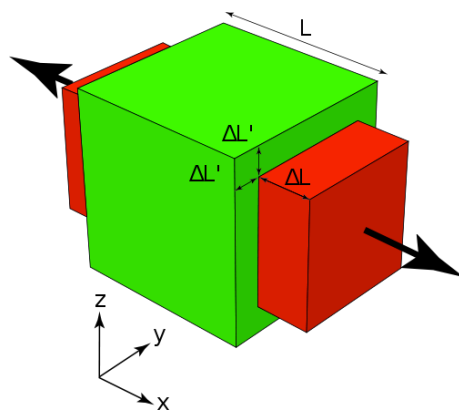
ahol α a hőtágulási együttható. Ezek után alkalmazzuk az eredeti feladat feltételét. Az 1.4 ábra alapján ez most az elmozdulások azonossága $\lambda_T = \lambda_R$. Tehát a határozott szerkezeten létrejövő elmozdulással meg kell egyeznie a reakció erő által okozott defromációknak, hiszen az eredő alakváltozás nulla. Ebből a feltételből pedig számolható a reakció erő.

Hosszirányú terhelés esetén a terhelt rúdnak nem csak hosszirányú hanem keresztirányú defromációja is lesz. Ez látható az 1.5 ábrán. Zöld a terheletlen állapot és piros a terhelt alak. A keresztirányú és a hosszirányú nyúlások

1. HÚZÁS



1.4. ábra. Statikailag határozatlan feladat



1.5. ábra. Hosszváltozás

1

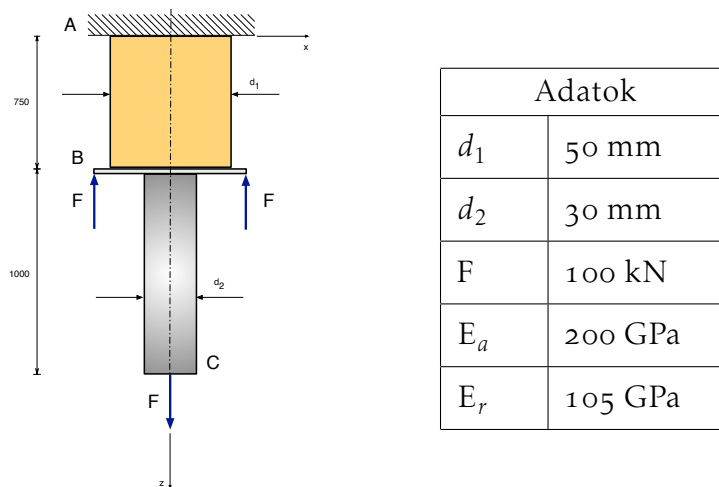
hányadosa a Poisson tényező, jele ν

$$\nu = \left| \frac{\Delta \text{kereszt}}{\Delta \text{hossz}} \right| = \frac{\Delta L'}{\Delta L} \quad (1.7)$$

1. Feladat

Az alábbi d_1, d_2 átmérőjű kompozit alkatrészt koncentrált erőkkel terheljük. Az AB szakasz sárgarézből míg a BC szakasz acélból készült. A hosszúságok mm-ben adottak.

(a) Határozza meg a szerkezet teljes hosszváltozását!



1.6. ábra. Axiális terhelés

Megoldás

Az egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_z = 0 \rightarrow A_z - 2F + F = 0 \rightarrow A_z = 100 \text{ kN} \quad (1.8)$$

Vagyis az AB szakaszon nyomás az igénybevétel, értéke 100 kN, a BC szakaszon pedig húzás az igénybevétel melynek értéke 100 kN. Az elmozdulás pedig

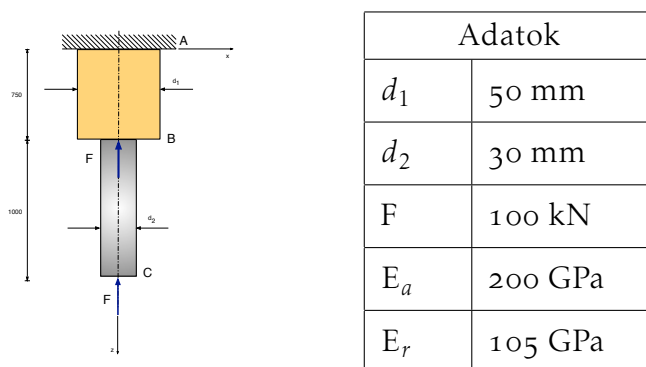
$$\lambda = -\frac{100000 \cdot 750}{A_r E_r} + \frac{100000 \cdot 1000}{A_a E_a} = 0.357 \text{ mm} \downarrow \quad (1.9)$$

2. Feladat

Az alábbi d_1, d_2 átmérőjű kompozit alkatrészt koncentrált erőkkel terheljük. Az AB szakasz sárgarézből míg a BC szakasz acélból készült. A hosszúságok mm-ben adottak.

1. HÚZÁS

(a) Határozza meg a szerkezet teljes hosszváltozását!



1.7. ábra. Axiális terhelés

Megoldás

Az egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_z = 0 \rightarrow A_z - 2F = 0 \rightarrow A_z = 200 \text{ kN} \quad (1.10)$$

Vagyis az AB szakaszon nyomás az igénybevétel, értéke 200 kN, a BC szakaszon is nyomás az igénybevétel melynek értéke 100 kN. Az elmozdulás pedig

$$\lambda = -\frac{200000 \cdot 750}{A_r E_r} - \frac{100000 \cdot 1000}{A_a E_a} = -1.435 \text{ mm} \uparrow \quad (1.11)$$

3. Feladat

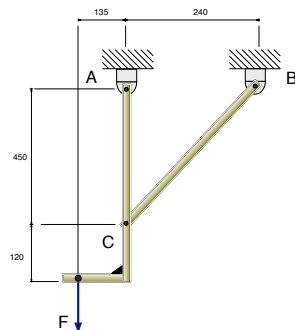
Az alábbi szerkezetet egy koncentrált erő terhel. A CB rúd keresztmetszete A. A hosszúságok mm-ben adottak.

(a) Mekkora lehet a terhelő erő F ha a megengedett feszültség adott ($F=62.745 \text{ kN}$)?

Megoldás

A nyomatéki egyenlet az A ponton átmenő tengelyre

$$\sum M_z = 0 \rightarrow 0.135F - 0.24B_y = 0 \rightarrow F = \frac{B_y}{0.5625} \quad (1.12)$$



Adatok	
A	800 mm ²
$\sigma_{max.}$	50 MPa

1.8. ábra. Axialis terhelés

A megengedett feszültség és a keresztmetszet alapján a legnagyobb erő a CB rúdban

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow F = \sigma A = 40 \text{ kN} \quad (1.13)$$

A geometria miatt

$$\frac{B_y}{B_x} = \frac{450}{240} \rightarrow B_y = 35.294 \text{ kN} \quad (1.14)$$

Ezzel

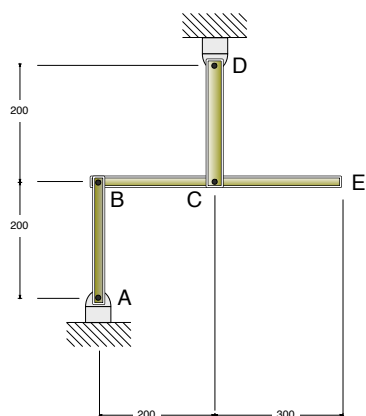
$$F = 62.745 \text{ kN}$$

4. Feladat

Az alábbi szerkezetet AB és CD rúdjai egyaránt A keresztmetszetűek. Ezekhez a merevnek tekinthető BE rúd csatlakozik. A hosszúságok mm-ben adottak. A terhelés az E pontban ébred.

- Mekkora lehet a függőlegesen felfele terhelő erő ha a megengedett feszültség adott?
- Mekkora lehet a függőlegesen lefele terhelő erő ha a megengedett feszültség adott?

1. HÚZÁS



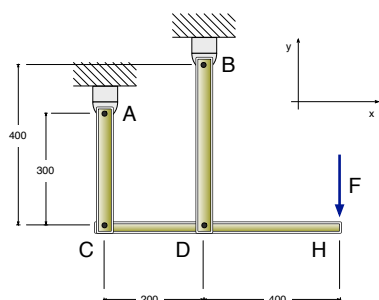
Adatok	
A	150 mm ²
$\sigma_{max.}$	200 MPa

1.9. ábra. Axiális terhelés

5. Feladat

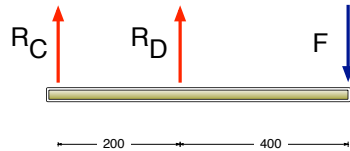
A merevnek tekinthető CDH rúdhoz az AC és BD rudak csatlakoznak. Az AC rúd alumínium ($E=70$ GPa), keresztmetszete A_1 míg a BD rúd acél ($E=200$ GPa) és keresztmetszete A_2 . A terhelés F ismert. A hosszúságok mm-ben adottak.

- Meghatározandó a C pont függőleges elmozdulása!
- Meghatározandó a D pont függőleges elmozdulása!
- Meghatározandó az H pont függőleges elmozdulása!



Adatok	
A_1	500 mm ²
A_2	600 mm ²
F	30 kN

1.10. ábra. Axiális terhelés



Szabad-test ábra és egyensúlyi egyenletek

$$\sum M_z = 0 : \quad -0.6F + 0.2S_D = 0$$

$$S_D = 90 \text{ kN},$$

$$\sum M_z = 0 : \quad -0.4F - 0.2S_C = 0$$

$$S_C = -60 \text{ kN},$$

Elmozdulások

A C pont elmozdulása, mivel S_C negatív

$$\lambda_C = \frac{S_C 0.3}{A_1 E} = -0.514 \text{ mm } \uparrow$$

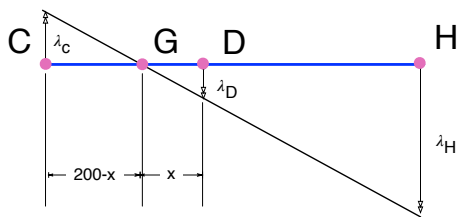
A D pont elmozdulása, mivel S_D pozitív

$$\lambda_D = \frac{S_D 0.4}{A_2 E} = 0.3 \text{ mm } \downarrow$$

Hasonló háromszögek alapján a H pont elmozdulása

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_D} = \frac{CG}{GD} \rightarrow x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{\lambda_H}{\lambda_D} = \frac{GH}{GD} \rightarrow \lambda_H = 1.928 \text{ mm } \downarrow$$



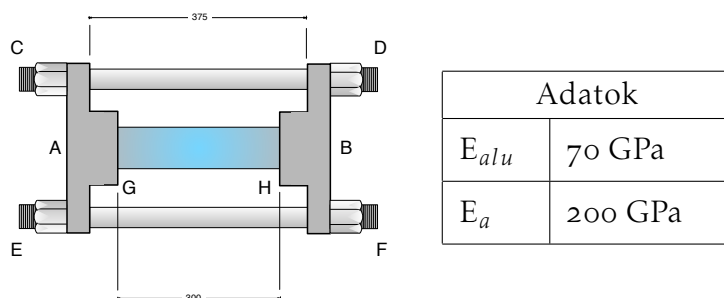
1.11. ábra. Elmozdulások

6. Feladat

A merev keret A és B, két 18 mm átmérőjű acél csavarral CD és EF kapcsolódik a 36 mm átmérőjű alumínium hengerhez. Mindkét csavar 2 mm-es menetemelkedésű. A csavarokat miután hézag nélkül felraktuk a két végükön (D,F) negyed fordulattal meghúzzuk. Ismert mindkét anyag rugalmassági modulusza.

1. HÚZÁS

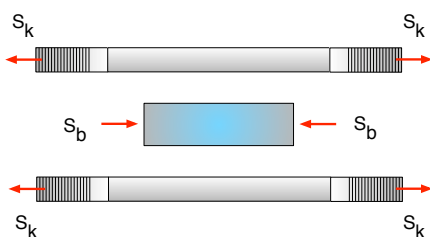
(a) Meghatározandó az alumínium hengerben ébredő normál feszültség!



1.12. ábra. Csavarkötés

Szabad-test ábra és a hosszváltozások

A csavarok meghúzása miatt a CD és EF rudak húzásnak vannak kitéve. A szimmetria miatt mindkét rúd azonos mértékben nyúlik meg



$$\lambda_k = \frac{S_k L_k}{A_a E_a} = \frac{S_k 0.375}{\frac{1}{4} \pi (0.018)^2 200} = 7.36810^{-9} S_k$$

A csavarok meghúzása miatt a GH rúd nyomásnak van kitéve. A hosszváltozás pedig

$$\lambda_b = \frac{-S_b L_b}{A_{alu} E_{alu}} = \frac{-S_b 0.3}{\frac{1}{4} \pi (0.036)^2 70} = -4.210^{-9} S_b$$

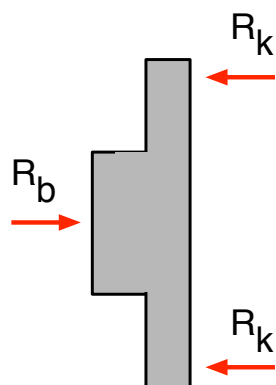
Relatív elmozdulás

Feltesszük, hogy a keret A része nem mozdul el. Ekkor a meghúzás miatti hosszváltozás $\frac{1}{4} 0.002 \text{ m} = 0.0005 \text{ m}$

$$\lambda_{AD} = 0.0005 \text{ m}$$

Vagyis a csavarok megnyúlása és az alumínium rúd rövidülése λ_{AD} kell, hogy legyen

$$\lambda_{AD} = \lambda_k - \lambda_b \quad (1.15)$$



Szabad-test ábra

A keretre ható erők és az egyensúlyi egyenlet ez alapján

$$\sum F = 0: \quad S_b - 2S_k = 0 \quad (1.16)$$

Felhasználva (1.15) és (1.16) egyenleteket a megoldás

$$S_b = 63.34 \text{ kN} \quad S_k = 31.67 \text{ kN}$$

A feszültség az alumínium rúdban pedig

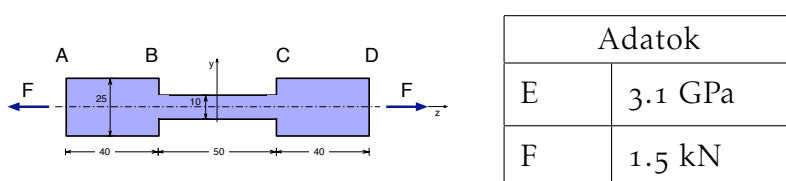
$$\sigma = \frac{S_b}{A_{alu}} = 62.2 \text{ MPa}$$

1. HÚZÁS

7. Feladat

Az alkatrész 5 mm vastag bakelitből került kivágásra. A terhelése az F koncentrált erőből áll.

- (a) Meghatározandó az alkatrész teljes hosszváltozása (0.794 mm)!
- (b) Meghatározandó a BC szakasz hosszváltozása (0.484 mm)!



1.13. ábra. Bakelit alkatrész

Megoldás

A teljes hosszváltozás

$$\lambda = 2 \cdot \frac{1500 \cdot 40}{5 \cdot 40 \cdot 3100} + \frac{1500 \cdot 50}{5 \cdot 10 \cdot 3100} = 0.794 \text{ mm} \quad (1.17)$$

A BC szakaszon

$$\lambda = \frac{1500 \cdot 50}{5 \cdot 10 \cdot 3100} = 0.484 \text{ mm} \quad (1.18)$$

8. Feladat

Az alábbi alkatrész egy csőből (A_{bronz} , E_{bronz}) és a benne levő hengerből áll (A_a , E_a). A cső anyaga bronz, a hengeré acél. Koncentrált erő F terheli egy tökéletesen merevnek tekinthető fedélen keresztül.

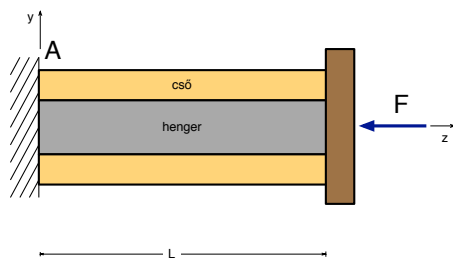
- (a) Meghatározandó az alkatrész teljes hosszváltozása!
- (b) Meghatározandó az erő a hengerben!
- (c) Meghatározandó az erő a csőben!

A merev fedél miatt a cső és a henger rövidülése azonos kell legyen. Ennek egyenlete

$$\lambda = \frac{S_a L}{A_a E_a} \equiv \frac{S_b L}{A_b E_b} \quad (1.19)$$

Az egyensúly miatt a csőben és a hengerben ébredő reakcióerők egyenlőnek kell lennie a terheléssel.

$$S_a + S_b = F \quad (1.20)$$



Megoldás

$$\lambda = \frac{S_a L}{A_a E_a}$$

$$S_a = \frac{F A_a E_a}{A_a E_a + A_b E_b}$$

$$S_b = \frac{F A_b E_{bronz}}{A_a E_a + A_b E_b}$$

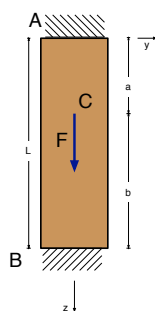
1.14. ábra. Hengeres alkatrész

1. HÚZÁS

9. Feladat

Az alábbi hengeres alkatrészt egy koncentrált erő F terhel.

(a) Meghatározandó a támaszokban ébredő reakcióerők!



Megoldás

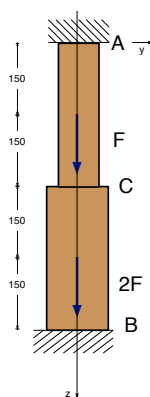
$$S_A = \frac{Fb}{L} \quad S_B = \frac{Fa}{L}$$

1.15. ábra. Axiális terhelés

10. Feladat

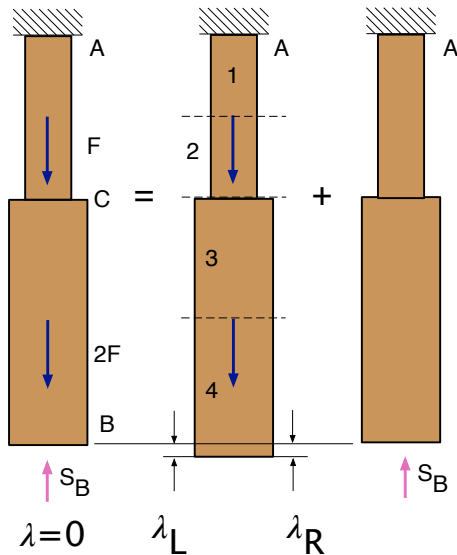
Az alábbi, két különböző keresztmetszetű hengeres alkatrészt koncentrált erő F terhel. A hosszúságok mm-ben adottak.

(a) Meghatározandó a támaszokban ébredő reakcióerők!



Adatok	
A_{AC}	250 mm^2
A_{CB}	400 mm^2
F	300 kN

1.16. ábra. Axiális terhelés



Megoldás szuperpozíció alkalmazásával

Mivel a feladat statikailag határozatlan, ezért első lépésben határozottá tesszük a szerkezetet a B támasz elvételével. Ezáltal a szerkezet megnyúlása Δ_L a négy részre bontott test alapján számolható

$$\lambda_L = \sum_{i=1}^4 \frac{S_i L_i}{A_i E_i}$$

$$\lambda_L = \sum_{i=1}^4 \frac{S_i L_i}{A_i E_i} = \left(\frac{900000}{250 \cdot 10^{-6}} + \frac{600000}{250 \cdot 10^{-6}} + \frac{600000}{400 \cdot 10^{-6}} + 0 \right) \frac{0.15}{E} = \frac{1.125 \cdot 10^9}{E} \quad (1.21)$$

A teljes szerkezetre ható reakcióerő R_B által okozott deformáció ugyanaz lesz, mint az előbb számolt határozott szerkezet esetén

$$\lambda_R = \lambda_L \quad \lambda_R = \frac{S_B \cdot 0.3}{250 \cdot 10^{-6} E} + \frac{S_B \cdot 0.3}{400 \cdot 10^{-6} E} \quad (1.22)$$

Felhasználva (1.21) és (1.22) egyenleteket $S_B = 577$ kN. Ezzel $S_A = 323$ kN.

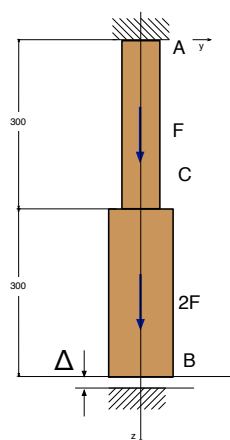
11. Feladat

Az alábbi, két különböző keresztmetszetű hengeres alkatrészt koncentrált erő F terhel. A terheletlen állapotban az alkatrész és a támasz között a távolság λ . A távolságok mm-ben adóttak.

(a) Meghatározandó a támaszokban ébredő reakcióerők!

Megoldás

1. HÚZÁS



Adatok	
A_{AC}	250 mm^2
A_{CB}	400 mm^2
F	300 kN

1.17. ábra. Axiális terhelés kezdeti hézaggal

Az előző feladattól eltérően most az eredő hosszváltozás nem nulla hanem λ lesz. A határozott feladat alapján létrejövő alakváltozás az előzőek alapján

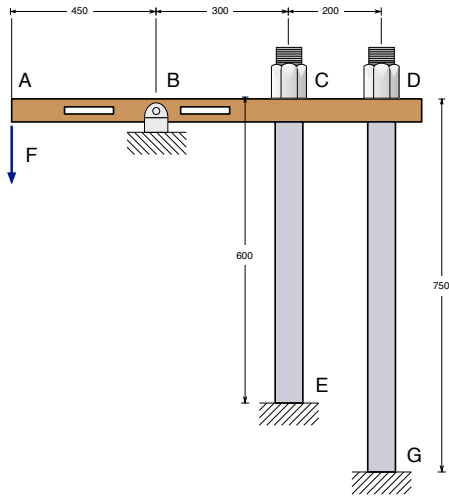
$$\lambda = \lambda_L + \lambda_R = \frac{1.125 \cdot 10^9}{E} + \frac{S_B 0.3}{250 \cdot 10^{-6} E} + \frac{S_B 0.3}{400 \cdot 10^{-6} E}$$

Innen $S_B = 115.4 \text{ kN}$. Az egyensúly miatt $S_A = 784.6 \text{ kN}$.

12. Feladat

Az alábbi 10 mm átmérőjű CE és a 15 mm átmérőjű DG rudat a me-rev AD gerendához csatlakoztatjuk. A rudak anyaga alumínium. A hosszúságok mm-ben adóttak.

- Meghatározandó a rudakban ébredő erők!
- Meghatározandó az A pont eltolódása!



Adatok	
E	70 GPa
F	32 kN

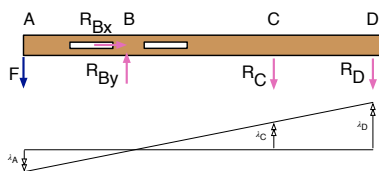
1.18. ábra. Csavarkötés

A nyomatéki egyenlet

$$\sum M = 0 \rightarrow 0.45F - 0.3S_C - 0.5S_D = 0$$

Hasonlóság

Hasonló háromszögek alapján



$$\frac{\lambda_C}{0.3} = \frac{\lambda_D}{0.5}$$

$$\frac{\lambda_A}{0.45} = \frac{\lambda_D}{0.5}$$

Elmozdulások felírása

A megnyúlások számítása

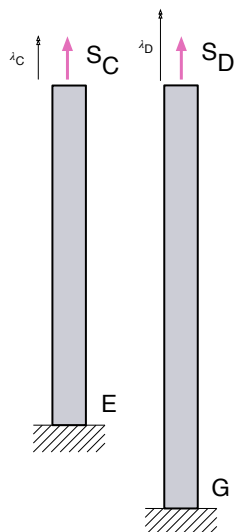
$$\lambda_C = \frac{S_C 0.6}{A_{CE} E}$$

$$\lambda_D = \frac{S_D 0.75}{A_{DG} E}$$

13. Feladat

Az alábbi AB merev gerenda a CD sárgaréz hengeren fekszik és a B pontban egy csuklóhoz csatlakozik. Az AE acél rúdon ($d=22$ mm) levő anyát

1. HÚZÁS



Erők meghatározása

Az egyenletrendszer megoldása alapján $S_C = 8 \text{ kN}$, $S_D = 24 \text{ kN}$.

Szabad test ábra

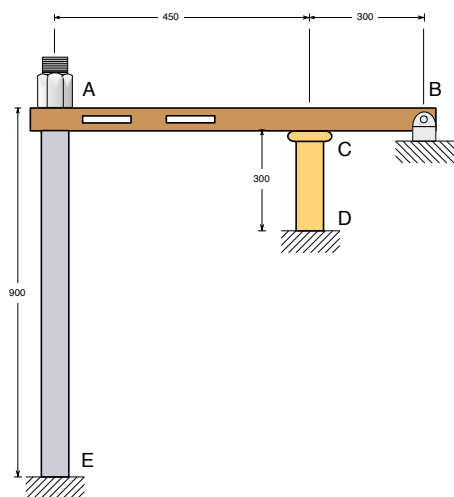
A D pont elmozdulása így

$$\lambda_D = \frac{S_D \cdot 0.75}{A_{DGE}} = 1.455 \text{ mm } \uparrow$$

Ezzel az A pont elmozdulása $\lambda_A = 1.31 \text{ mm } \downarrow$.

hézagmentesen rácsavarják amikor a rendszer hőmérséklete 20°C . Ezután a sárgaréz hőmérsékletét megemeljük 50°C -ra miközben a rúd hőmérséklete nem változik.

(a) Mekkora feszültség ébred a sárgaréz hengerben?

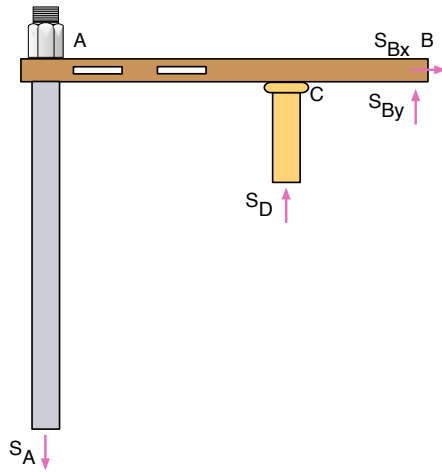


Adatok	
E_a	200 GPa
E_r	105 GPa
α_a	$12 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$
α_r	$18.8 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$

1.19. ábra. Csavarkötés

Elmozdulások

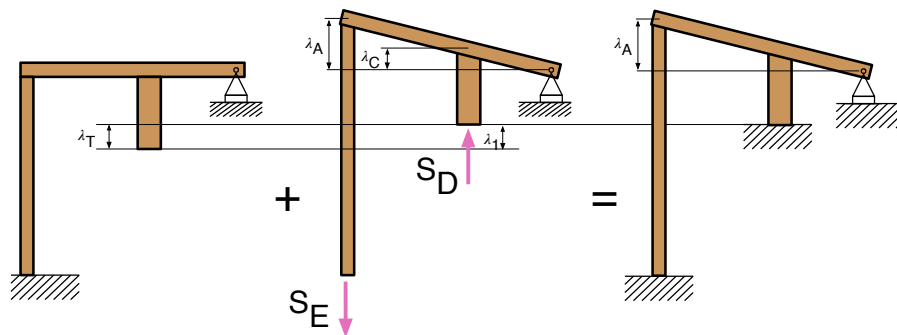
A megoldáshoz a szuperpozíció elve alapján kezdünk. A D támaszt elvéve számolható a hőmérséklet különbség hatására létrejövő elmozdulás λ_T .



Egyensúlyi egyenlet

$$\sum M = 0 : 0.75S_A - 0.3S_D = 0$$

1.20. ábra. Szabad test ábra



1.21. ábra. Elmozdulások

A D-ben ébredő reakció erőnek S_D ugyanekkora λ_1 elmozdulást kell okozni, hiszen a D pont nem mozdulhat el.

$$\lambda_T = L\alpha_r\Delta T = 169.2 \cdot 10^{-6} \text{m} \downarrow$$

Elmozdulások

Az ábra alapján írható $\frac{\lambda_C}{0.3} = \frac{\lambda_A}{0.75}$ valamint $\lambda_1 = \lambda_{D/C} + \lambda_C$

$$\lambda_C = \frac{0.3\lambda_A}{0.75}$$

$$\lambda_A = \frac{S_A \cdot 0.9}{A_a E_a}$$

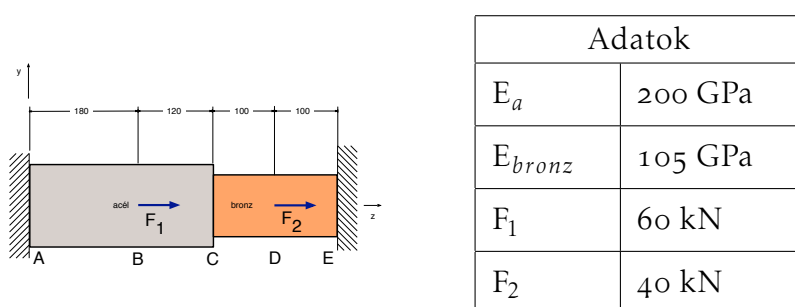
$$\lambda_{D/C} = \frac{S_D \cdot 0.3}{A_r E_r}$$

1. HÚZÁS

14. Feladat

Az alábbi két hengeres rúd, az egyik acél a másik bronz, a C pontban csatlakozik. A támaszok A és E teljesen merevek. A hosszúságok mm-ben adottak. Az acél henger átmérője 40 mm, a bronzé 30 mm.

(a) Meghatározandó a támaszokban ébredő reakcióerők!



1.22. ábra. Különböző anyagok hosszváltozása

Az egyensúlyi egyenlet

$$\sum F_z = 0 \rightarrow R_A + F_1 + F_2 + R_E = 0 \quad (1.23)$$

A szerkezet statikailag határozatlan. Ezért az E támasz elvételével határozottá tesszük. A reakcióerő ekkor az A támaszban 100 kN \leftarrow . Az így létrejövő hosszváltozás

$$\lambda = \frac{100000 \cdot 180}{\frac{40^2 \pi}{4} 200000} + \frac{40000 \cdot 120}{\frac{40^2 \pi}{4} 200000} + \frac{40000 \cdot 100}{\frac{30^2 \pi}{4} 105000} = 0.146 \text{ mm} \quad (1.24)$$

A tényleges hosszváltozás azonban nulla, vagyis az E-ben ébredő reakcióerő által okozott hosszváltozás λ kell legyen

$$\lambda = \frac{R_E \cdot 300}{\frac{40^2 \pi}{4} 200000} + \frac{R_E \cdot 200}{\frac{30^2 \pi}{4} 105000} \rightarrow R_E = 37188 \text{ N} \quad (1.25)$$

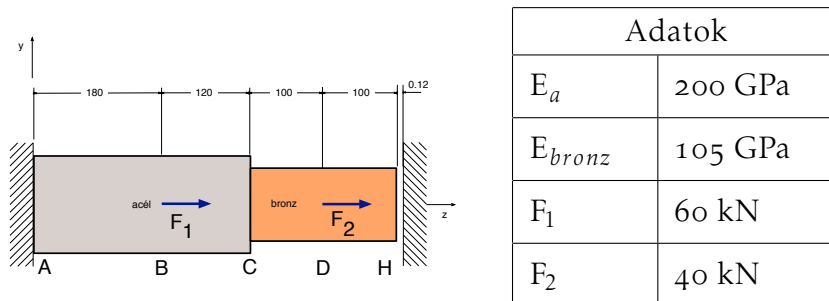
Az egyensúlyi egyenletből pedig

$$R_A = 100000 - 37188 = 62812 \text{ N}$$

15. Feladat

Az alábbi két hengeres rúd, az egyik acél a másik bronz, a C pontban csatlakozik. A támaszok A és E teljesen merevek. A hosszúságok mm-ben adottak. Az acél henger átmérője 40 mm, a bronzé 30 mm. Kezdetben a terhelés nélkül a hézag 0.12 mm. Miután megterheljük a szerkezetet a két koncentrált erővel

(a) meghatározandó a támaszokban ébredő reakcióerők!



1.23. ábra. Különböző anyagok hosszváltozása

Megoldás

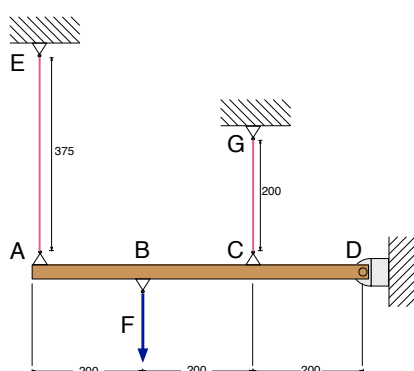
$$S_E = 61600 \text{ N}, S_A = 38400 \text{ N}$$

1. HÚZÁS

16. Feladat

Az alábbi AD merev rudat két, kör keresztmetszetű acéldrót ($d=5\text{mm}$), valamint a D csukló tartja. A hosszúságok mm-ben adóttak.

- Meghatározandó a drótokban ébredő erő!
- Meghatározandó a B pont eltolódása!



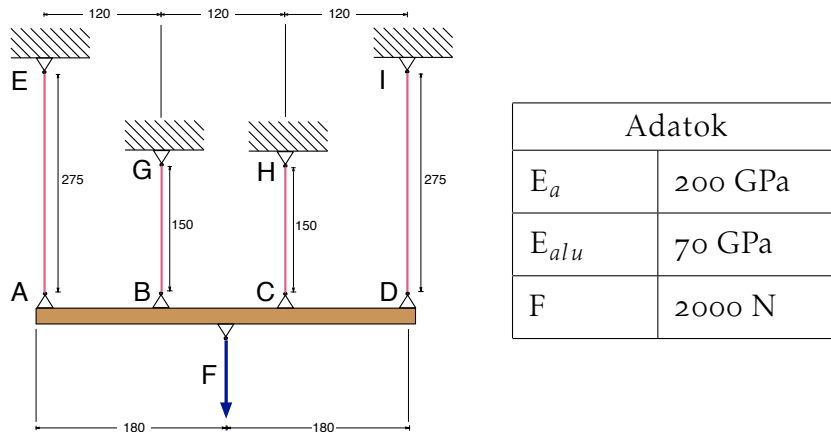
Adatok	
E_a	200 GPa
F	500 N

1.24. ábra. Drótok hosszváltozása

17. Feladat

Az alábbi AD merev rudat két, kör keresztmetszetű AE és ID alumíniumdrót ($d=2.5\text{ mm}$), valamint két, kör keresztmetszetű BG és CH acéldrót ($d=2\text{ mm}$) tartja. A hosszúságok mm-ben adóttak.

- Meghatározandó a drótokban ébredő erő ($S_A = S_D = 230\text{ N}$, $S_B = S_C = 770\text{ N}$)!
- Meghatározandó a drótok eltolódása ($\lambda = 0.1839\text{ mm}$)!

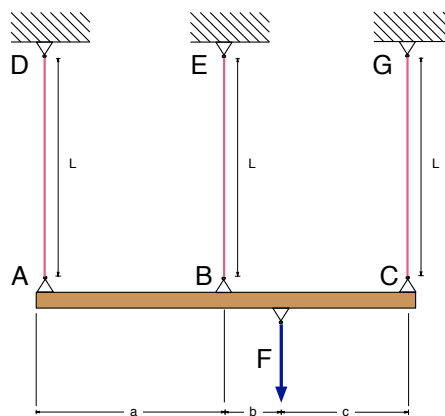


1.25. ábra. Drótok hosszváltozása

18. Feladat

Az alábbi AC merev rudat három acéldrót tartja. A hosszúságok és a terhelő erő ismertek.

- (a) Meghatározandó a drótokban ébredő erő!
- (b) Meghatározandó a drótok eltolódása!



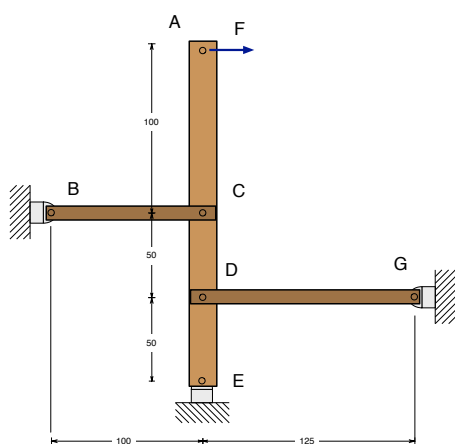
1.26. ábra. Drótok hosszváltozása

1. HÚZÁS

19. Feladat

Az alábbi AE merev rúdhoz két acél tartó és az E csukló csatlakozik, keresztmetszetük A. A hosszúságok mm-ben adottak.

- (a) Meghatározandó a tartókban ébredő erő ($S_{BC} = 4.17 \text{ kN}$, $S_{DG} = 1.667 \text{ kN}$)!
(b) Meghatározandó az A pont eltolódása ($\lambda = 57.9 \mu\text{m} \rightarrow$)!



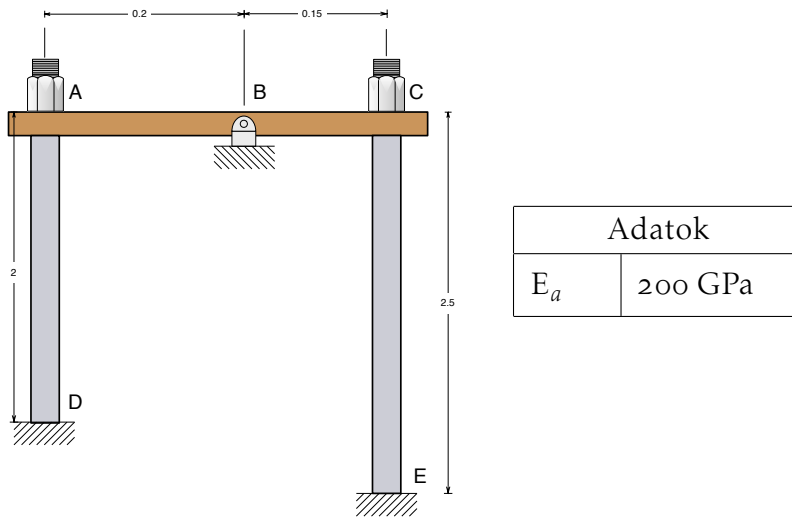
Adatok	
E_a	200 GPa
A	72 mm^2
F	2500 N

1.27. ábra. Szerkezet hosszváltozása

20. Feladat

Az alábbi két acél rúd (átmérő $d=8$ mm) AD és CE egy merevnek tekinthető elemmel csatlakozik egymáshoz. A menetemelkedés 2 mm. Miután hézagmentesen felrakták a két anyát, az A helyen levőt két teljes fordulattal meghúzták. A távolságok m-ben adottak.

- (a) Meghatározandó a rudakban ébredő erő!
 (b) Meghatározandó az A pont eltolódása!



1.28. ábra. Csavarkötés

21. Feladat

A feladat ugyanaz mint az előző példában, de most a C pontban levő anyát húzzák meg.

- (a) Meghatározandó a rudakban ébredő erő ($S_{AD} = 8.32$ kN, $S_{CE} = 11.09$ kN)!
 (b) Meghatározandó az A pont eltolódása ($\lambda = 1.655$ mm \uparrow)!

22. Feladat

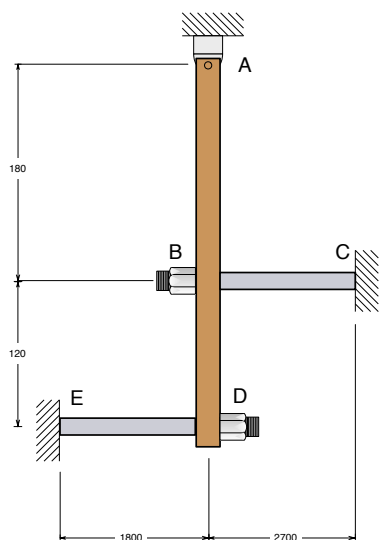
Az alábbi két acél rúd (átmérő $d=15$ mm) ED és BC egy merevnek tekinthető elemmel csatlakozik egymáshoz. A menetemelkedés 2.25 mm.

1. HÚZÁS

Miután hézagmentesen felrakták a két anyát, a D helyen levőt egy teljes fordulattal meghúzták. A távolságok mm-ben adottak.

(a) Meghatározandó az ED rúdban ébredő erő ($S_{ED} = 8.55 \text{ kN}$)!

(b) Meghatározandó a D pont eltolódása ($\Delta = 1.815 \text{ mm} \leftarrow$)!



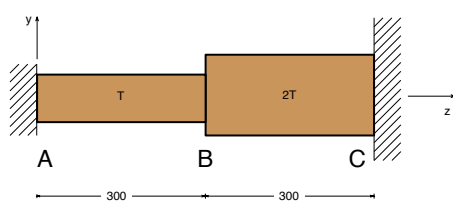
Adatok	
E_a	200 GPa

1.29. ábra. Csavarkötés

23. Feladat

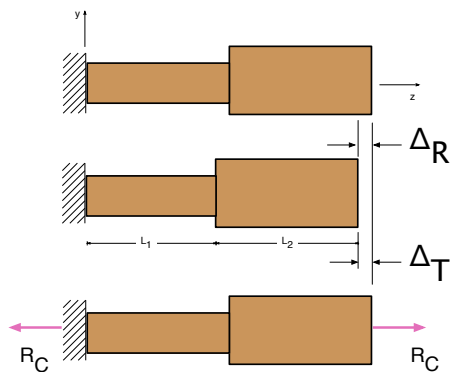
Az alábbi két különböző átmérőjű acélhenger 25°C-on feszültségmentes. Majd lehűtjük a hengereket -50 °C-ra.

- (a) Meghatározandó az AB szakaszban ébredő feszültség!
- (b) Meghatározandó a CB szakaszban ébredő feszültség!



Adatok	
E	200 GPa
α	$12 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
T	400 mm^2

1.30. ábra. Hőmérséklet emelkedés hatása



Szuperpozíció

A feladat statikailag határozatlan, ezért a C támasz elvételével határozottá tesszük. A reakcióerőnek, R_C pontosan akkora elmozdulást λ_R kell okoznia, mint ami a hőmérséklet változás miatt jönne létre λ_T .

$$\lambda_T = \alpha \Delta T L = -540 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\lambda_R = \frac{S_C 0.3}{TE} + \frac{S_C 0.3}{2TE} = 5.625 \cdot 10^{-9} S_B$$

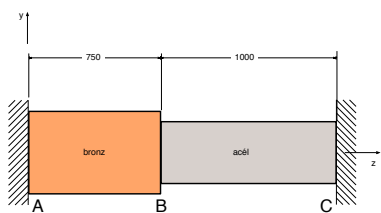
Innen a reakcióerő $S_C = 96 \text{ kN}$. A kérdéses feszültségek pedig $\sigma_z^{AB} = \frac{S_C}{T} = 240 \text{ MPa}$, $\sigma_z^{CB} = \frac{S_C}{2T} = 120 \text{ MPa}$.

24. Feladat

Az alábbi AB rúd (átmérő $d=30 \text{ mm}$) bronzból, míg a BC rúd acélból (átmérő $d=20 \text{ mm}$) készült. Kezdetben feszültségmentes mindkét rúd majd 50°C-kal megemeljük a hőmérsékletet. A távolságok mm-ben adóttak.

1. HÚZÁS

- (a) Meghatározandó az AB szakaszban ébredő feszültség ($\sigma_z = -67.2 \text{ MPa}$)!
 (b) Meghatározandó az BC szakaszban ébredő feszültség ($\sigma_z = -151.2 \text{ MPa}$)!
 (c) Meghatározandó a B pont eltolódása ($\lambda_B = 171 \mu\text{m} \rightarrow$)!



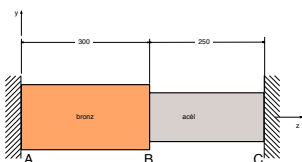
Adatok	
E_a	200 GPa
E_{bronz}	100 GPa
α_a	$11.7 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_{bronz}	$18 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

1.31. ábra. Hőmérséklet emelkedés hatása

25. Feladat

Az alábbi AB rúd (átmérő $d=40 \text{ mm}$) bronzból, míg a BC rúd acélból (átmérő $d=20 \text{ mm}$) készült. Kezdetben feszültségmentes mindkét rúd majd 40°C -kal megemeljük a hőmérsékletet. A távolságok mm-ben adottak.

- (a) Meghatározandó az AB szakaszban ébredő feszültség!
 (b) Meghatározandó az BC szakaszban ébredő feszültség!
 (c) Meghatározandó a B pont eltolódása!



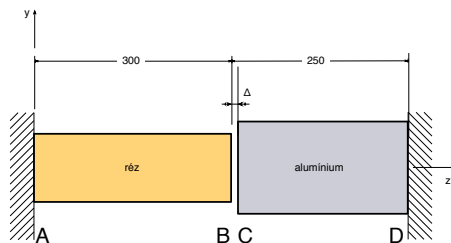
Adatok	
E_a	210 GPa
E_{bronz}	105 GPa
α_a	$12.5 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
α_{bronz}	$18 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

1.32. ábra. Hőmérséklet emelkedés hatása

26. Feladat

Az alábbi AB rúd ($d=50\text{mm}$) anyaga sárgaréz a CD rúd ($d=75\text{mm}$) anyaga alumínium. Kezdetben 15°C -on a két elem között a távolság Δ majd megemeljük 85°C -ra a hőmérsékletet.

- (a) Meghatározandó a rudakban ébredő feszültség ($\sigma_z^r = -79.1\text{ MPa}$, $\sigma_z^{alu} = -35.16\text{ MPa}$)!
- (b) Meghatározandó az AB szakasz eltolódása ($\lambda_{AB} = 0.213\text{ mm} \rightarrow$)!



Adatok	
E_r	105 GPa
E_{alu}	70 GPa
α_r	$20.9 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$
α_{alu}	$23.6 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$
Δ	0.5 mm

1.33. ábra. Hőmérséklet emelkedés hatása

1. HÚZÁS

27. Feladat

Az alábbi kör keresztmetszetű rúd átmérője d -ről lineárisan növekszik D -re, hossza L . A két végén F koncentrált erő terheli.

(a) Meghatározandó a rúd teljes hosszváltozása!

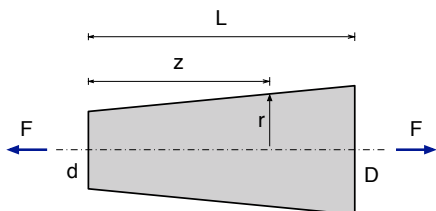
Megoldás

Tetszőleges z távolságra a rúd sugara leírható az

$$r(z) = \frac{d}{2} + \frac{z}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \quad (1.26)$$

alakban. A hosszváltozás pedig

$$\lambda = \int_0^L \frac{F}{A(z)E} dz = \int_0^L \frac{F}{r(z)^2 \pi E} dz = \frac{4FL}{\pi d D E} \quad (1.27)$$



1.34. ábra. Változó keresztmetszet

28. Feladat

Az alábbi két vékony rudat egy F koncentrált erő terhel. Kezdetben a rudak helyzete vízszintes, hosszuk L . A rudak tömege elhanyagolható. Az erőt a C pontban fokozatosan addig növeljük, amíg a pont függőleges eltolódása δ nem lesz.

(a) Meghatározandó az F erő értéke!

Megoldás

A terhelés hatására a rudak hossza megváltozik, L_1 lesz. A húzó igénybevétel miatti hosszváltozás

$$L_1 - L = \frac{PL}{AE} \quad (1.28)$$

Az egyensúlyi egyenlet felírása alapján

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2P \sin \varphi - F = 0 \rightarrow F = 2P \frac{\delta}{L_1} \quad (1.29)$$

ahol L_1 a terhelés utáni hossza a rúdnak. Felhasználva (1.28) egyenletet

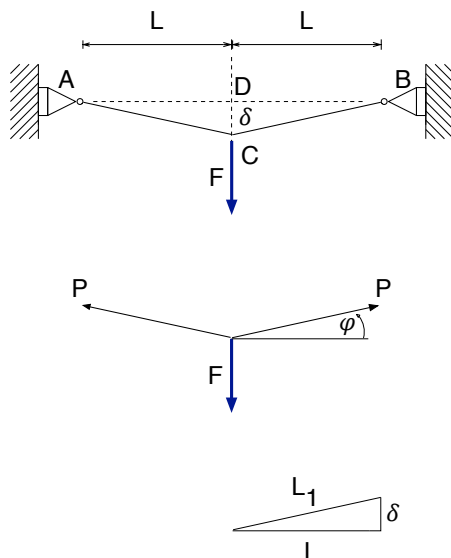
$$F = 2 \frac{L_1 - L}{L} AE \frac{\delta}{L_1} = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{L_1}\right) \quad (1.30)$$

A háromszög miatt azonban

$$L^2 + \delta^2 = L_1^2 \quad (1.31)$$

Ezzel

$$F = \frac{2\delta AE}{L} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + \delta^2}}\right) \quad (1.32)$$



1.35. ábra. Nemlineáris alakváltozás

1. HÚZÁS

29. Feladat

Az alábbi kör keresztmetszetű rúd átmérője d -ről lineárisan növekszik D -re, hossza L . A két végén a merev befogás meggátolja a hosszirányú hosszváltozást. Az egész rúd hőmérsékletét megemeljük ΔT -vel.

(a) Meghatározandó a rúd tetszőleges keresztmetszetében a normál feszültség!

Megoldás

Tetszőleges z távolságra a rúd sugara leírható az

$$r(z) = \frac{d}{2} + \frac{z}{L} \left(\frac{D-d}{2} \right) \quad (1.33)$$

alakban. Az egyensúlyi egyenlet felírása alapján a feladat statikailag határozatlan

$$\sum F_z = 0 \rightarrow A + B = 0 \quad (1.34)$$

A B támasz elvételével a feladat határozottá válik. Ebben az esetben a rúd tágulása a hőmérséklet emelkedése miatt $\lambda = \alpha L \Delta T$. Az eredeti problémában azonban a hosszváltozás nulla, vagyis a falban ébredő reakcióerőnek, N -nek λ hosszváltozást kell létrehoznia

$$\frac{N dz}{A(z)E} = d\lambda \quad (1.35)$$

1.36. ábra. Változó keresztmetszetű rúd

$$\lambda = \int_0^L \frac{N}{A(z)E} dz = \int_0^L \frac{F}{r(z)^2 \pi E} dz = \frac{4NL}{dDE\pi} \quad (1.36)$$

Egyenlővé téve a két kifejezést és elvégezve az átrendezést

$$\alpha L \Delta T = \frac{4NL}{dDE\pi} \rightarrow N = \frac{\alpha \Delta T}{4} dDE\pi \quad (1.37)$$

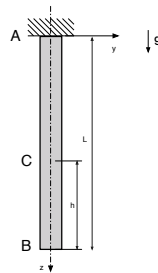
A normál feszültség pedig

$$\sigma_z(z) = -\frac{N}{A(z)} = -\frac{dDL^2E\alpha\Delta T}{(d(L-z) + Dz)^2} \quad (1.38)$$

30. Feladat

A prizmatikus rúd az A keresztmetszetben van megfogva. Saját súlya terheli.

- (a) Határozza meg a C pont elmozdulását λ_C !
- (b) Mekkora teljes hosszváltozás λ_B ?
- (c) Mekkora a felső fél és az alsó fél elmozdulásának az aránya ψ ?



1.37. ábra. Önsúly hatása

Az elmozdulás

$$\lambda_C = \int_h^L \frac{F(z) dz}{AE} = \frac{mgz dz}{AEL} = \frac{mg}{2EAL} (L^2 - h^2) \quad (1.39)$$

A teljes hosszváltozás esetén $h = 0$, tehát

$$\lambda_B = \frac{mg}{2EAL} L^2 \quad (1.40)$$

A felső fél elmozdulása esetén $h = \frac{L}{2}$

$$\lambda_f = \frac{3mgL}{8EA} \quad (1.41)$$

1. HÚZÁS

Az alsó rész elmozdulása

$$\lambda_a = \lambda_B - \lambda_f = \frac{mgL}{8EA} \quad (1.42)$$

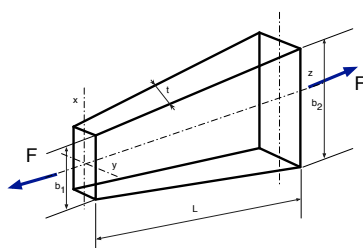
A hányadosuk így

$$\psi = \frac{\lambda_f}{\lambda_a} = 3 \quad (1.43)$$

31. Feladat

A prizmatikus rudat, aminek téglalap a keresztmetszete, szélessége állandó, t ; koncentrált erő húzza. A rúd magassága lineárisan változik b_1 -ről b_2 -re.

(a) Határozza meg a rúd megnyúlását λ -t!



1.38. ábra. Változó keresztmetszetű rúd

A keresztmetszet változása a hossz függvényében

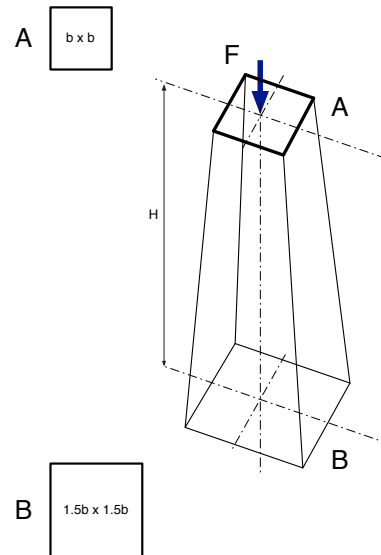
$$A(z) = bt = b_1 \frac{z}{L_0} t \quad (1.44)$$

A megnyúlás

$$d\lambda = \frac{P dz}{A(z) E} \rightarrow \lambda = \int_{L_0}^{L_0+L} \frac{P dz}{A(z) E} = \frac{PL_0}{Eb_1 t} \ln \frac{L_0 + L}{L_0} \quad (1.45)$$

32. Feladat

Az oszlop magassága H , négyzet keresztmetszetű. Az alpnál $1.5b \times 1.5b$ nagyságú és a tetejéig lineárisan változik $b \times b$ -ig. A tetején egy koncentrált erő terheli.



1.39. ábra. Változó keresztmetszetű oszlop

(a) Határozza meg az oszlop rövidülését az önsúly figyelmen kívül hagyásával!

A keresztmetszet változása a hossz függvényében

$$A(z) = b(z)^2 = \left(b + (1.5b - b) \frac{z}{H} \right)^2 \quad (1.46)$$

A megnyúlás

$$d\lambda = \frac{P dz}{A(z) E} \rightarrow \lambda = \int_0^H \frac{PH^2}{Eb^2} \frac{dz}{(H + 0.5z)^2} = \frac{2PH}{3Eb^2} \quad (1.47)$$

33. Feladat

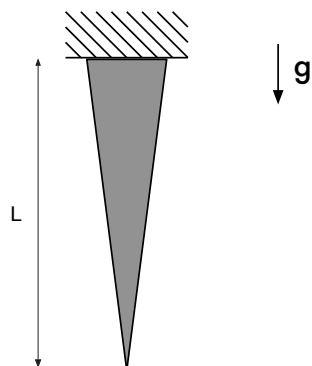
Egy L hosszú, karcsú körkúp függőlegesen lóg, az önsúlyán kívül más nem terheli. Az alapkör átmérője d .

(a) Határozza meg az oszlop hosszváltozását az önsúly hatására!

A terhelés és a térfogat változása a hossz függvényében

$$V(z) = b(z)^2 = \left(b + (1.5b - b) \frac{z}{H} \right)^2 \quad (1.48)$$

1. HÚZÁS



1.40. ábra. Függő kúp

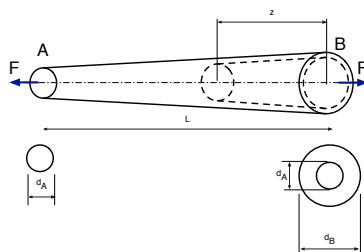
A megnyúlás

$$d\lambda = \frac{mgz \, dz}{A_a(z) EL} \rightarrow \lambda = \int_0^L \frac{4mgz}{\pi ELd^2} \, dz = \frac{2mgL}{\pi Ed^2} \quad (1.49)$$

34. Feladat

Az L hosszúságú cső átmérője lineárisan változik d_A -ról $d_B = 2d_A$ -ra. Koncentrált erő terheli.

- Határozza meg a cső hosszváltozását, ha a furat állandó átmérőjű ($z = \frac{L}{2}$)!
- Határozza meg a cső hosszváltozását, ha a furat állandó vastagságú ($t = \frac{d_A}{20}$)!



1.41. ábra. Változó átmérőjű cső

- Megoldás állandó átmérő esetén.

Az átmérő változása ebben az esetben

$$d(z) = d_A \left(1 + \frac{z}{L}\right) \quad (1.50)$$

Ezzel a keresztmetszet változása a hossz mentén

$$A(z) = \begin{cases} \frac{d(z)^2 \pi}{4}, & 0 < z < L - z \\ \frac{d(z)^2 - d_A^2}{4} \pi, & L - z < z < L \end{cases}$$

A hosszváltozás pedig

$$\lambda = \frac{P}{E} \int_0^{L-z} \frac{4}{d(z)^2 \pi} dz + \frac{P}{E} \int_{L-z}^L \frac{4}{(d(z)^2 - d_A^2) \pi} dz \quad (1.51)$$

Felhasználva (1.50)-t

$$\lambda = \frac{P}{E} \int_0^{L-z} \frac{4}{\left(d_A \left(1 + \frac{z}{L}\right)\right)^2 \pi} dz + \frac{P}{E} \int_{L-z}^L \frac{4}{\left(\left(d_A \left(1 + \frac{z}{L}\right)\right)^2 - d_A^2\right) \pi} dz \quad (1.52)$$

Elvégezve az integrálásokat a végeredmény

$$\lambda = \frac{P}{E} \left[\frac{4L^2}{\pi d_A^2 (z-2)} + \left(\frac{4L}{\pi d_A^2} - \frac{2L \ln 3}{\pi d_A^2} + 2L \frac{\ln(3L-z) - \ln(L-z)}{\pi d_A^2} \right) \right] \quad (1.53)$$

Ha $z = \frac{L}{2}$, akkor

$$\lambda = \frac{P}{E} \left(\frac{4L}{3\pi d_A^2} - 2L \frac{\ln 3}{\pi d_A^2} + 2L \frac{\ln\left(\frac{5}{2}L\right)}{\pi d_A^2} \right) \quad (1.54)$$

- Megoldás állandó falvastagság esetén ($t = \frac{d_A}{20}$)

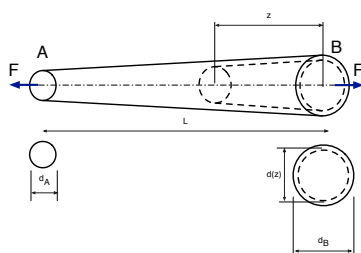
Az átmérő változása ebben az esetben

$$d(z) = d_A \left(1 + \frac{z}{L}\right) \quad (1.55)$$

Ezzel a keresztmetszet változása a hossz mentén

$$A(z) = \begin{cases} \frac{d(z)^2 \pi}{4}, & 0 < z < L - z \\ \frac{d(z)^2 - \left(d(z) - 2\frac{d_A}{20}\right)^2}{4} \pi, & L - z < z < L \end{cases}$$

1. HÚZÁS



1.42. ábra. Változó átmérőjű cső

A hosszváltozás

$$\lambda = \frac{P}{E} \int \frac{1}{A(z)} dz \quad (1.56)$$

$$\lambda = \frac{P}{E} \int_0^{L-z} \frac{4}{(d_A(1+\frac{z}{L}))^2 \pi} dz + \frac{P}{E} \int_{L-z}^L \frac{4}{\left((d_A(1+\frac{z}{L}))^2 - \left(d_A(1+\frac{z}{L}) - 2\frac{d_A}{20} \right)^2 \right) \pi} dz \quad (1.57)$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\lambda = \frac{P}{E} \left[\frac{4L^2}{\pi d_A^2 (z-2L)} + \frac{4L}{\pi d_A^2} + 20L \frac{\ln 3 + \ln 13 + 2 \ln(d_A) + \ln L}{\pi d_A^2} - 20L \frac{2 \ln(d_A) + \ln(39L-20z)}{\pi d_A^2} \right] \quad (1.58)$$

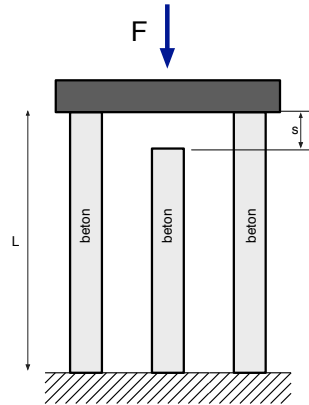
Ha $z = \frac{L}{2}$, akkor

$$\lambda = \frac{P}{E} \left(\frac{4L}{3\pi d_A^2} + 20L \frac{\ln 3 + \ln 13 + 2 \ln(d_A) + \ln L}{\pi d_A^2} - 20L \frac{\ln(d_A) + \ln(29L)}{\pi d_A^2} \right) \quad (1.59)$$

35. Feladat

A teljesen merevnek tekintendő elemet három beton oszlop tartja, keresztmetszetük azonos, nagysága A . Terheletlen állapotban a középső oszlop $s = 1$ mm-rel rövidebb a másik kettőnél. A terhelés a P koncentrált erő.

- (a) Határozza meg a terhelő erő legnagyobb értékét P -t, ha a betonra a megengedett feszültség σ_m !



Adatok	
E	30 GPa
σ_m	20 MPa
A	4000 mm ²
L	2 m

1.43. ábra. Beton oszlop

A keletkező feszültség az 1 mm-es rés bezárása esetén

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\frac{s}{L} = 15\text{MPa} \quad (1.60)$$

Mivel ez kisebb, mint a megengedett feszültség ezért a terhelő erő bezárja a rést. Az egyensúlyi egyenlet

$$2P_1 + P_2 = P \quad (1.61)$$

A rövidülések felírása

$$\lambda_1 = \lambda_2 + s \quad (1.62)$$

ahol λ_1 a szélső oszlopok rövidülése, λ_2 a középső oszlop rövidülése. Ezek felírhatóak a

$$\lambda_i = \frac{P_i L}{EA}$$

összefüggéssel. Ezt felhasználva a rövidülések alakja a következő lesz

$$\frac{P_1 L}{AE} = \frac{P_2 L}{AE} + s \rightarrow P_1 = P_2 + s \quad (1.63)$$

Az egyenletrendszer megoldása után

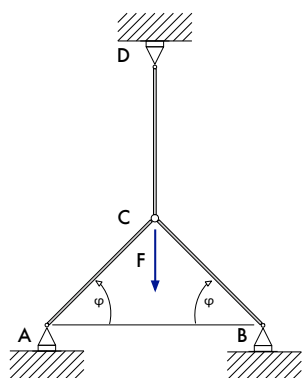
$$P = 3P_1 - \frac{EAs}{L} \quad (1.64)$$

1. HÚZÁS

36. Feladat

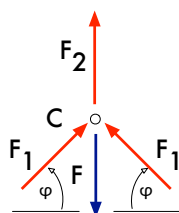
A három rúdból álló szerkezetet egy koncentrált erő terhel. Mindhárom rúd azonos L hosszúságú, E rugalmassági modulusú; az AC és BC rudak A_1 , míg a CD rúd A_2 keresztmetszetű.

(a) Határozza meg a rudakban ébredő erőket!



1.44. ábra. Határozatlan szerkezet

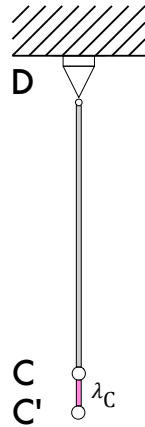
A C csomópont egyensúlya alapján az egyensúlyi egyenlet felírható.



1.45. ábra. Reakciók

$$\sum F = 0 \rightarrow 2F_1 \sin \varphi + F_2 - F = 0 \quad (1.65)$$

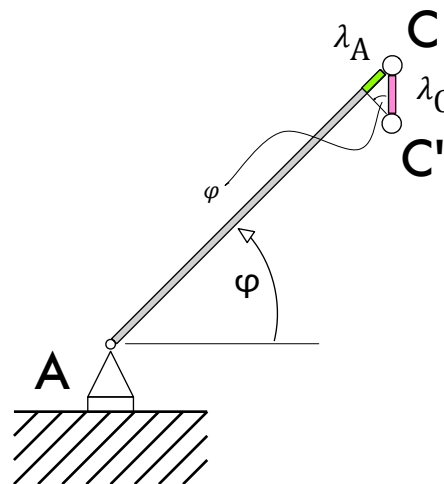
Külön megvizsgálva a DC rudat, a terhelés hatására a C pont függőlegesen elmozdul a C' helyre. Ennek mértéke $\lambda_C = \frac{F_2 L}{A_2 E}$.



1.46. ábra. A C pont elmozdulása

Az AC rúd a terhelés hatására összenyomódik, az ábrán zölddel jelölve. Ennek mértéke $\lambda_A = \frac{F_1 L}{A_1 E}$. Ennek a függőleges vetülete meg fog egyezni a C pont elmozdulásával, hiszen ezek egy pontban csatlakoznak. Vagyis

$$\frac{F_1 L}{A_1 E \sin \varphi} = \frac{F_2 L}{A_2 E} \quad (1.66)$$



1.47. ábra. Az AC rúd elmozdulása

Az egyenletrendszer megoldása után a kérdéses erők

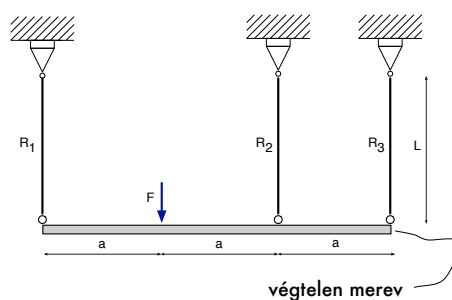
$$F_1 = \frac{F \sin \varphi}{2 \sin^2 \varphi + \frac{A_2}{A_1}}, F_2 = \frac{F \frac{A_2}{A_1}}{2 \sin^2 \varphi + \frac{A_2}{A_1}} \quad (1.67)$$

1. HÚZÁS

37. Feladat

A végtelen merev testet három azonos hosszúságú rúddal függesztjük fel. A rudak geometriai mérete és anyaga azonos (A , E).

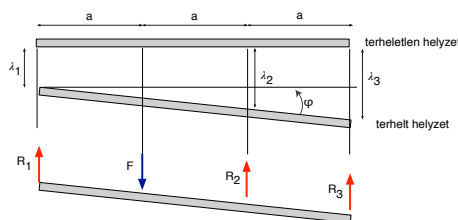
- Határozza meg az egyes rudakban ébredő erőket!
- Rajzolja meg a merev gerenda nyomatéki ábráját!



1.48. ábra. Merev gerenda

A vázolt feladat egyszerűen határozatlan, vagyis a statikában megismert egyensúlyi egyenletek nem elegendők az ismeretlenek meghatározásához.

Mivel a végtelen merev test nem tud deformálódni, ezért az egyes rúdnyúlások egymással kifejezhetők.



Amennyiben a gerenda φ szöggel fordul el, akkor az egyes megnyúlások

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2a\varphi \quad (1.68)$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 + 3a\varphi \quad (1.69)$$

A merev test a rá ható erők hatására egyensúlyban van, vagyis

$$F_1 + F_2 + F_3 = F \quad (1.70)$$

$$-Fa + 2aF + 3aF = 0 \quad (1.71)$$

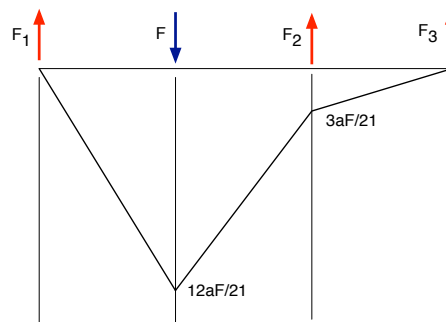
Továbbá

$$\lambda_i = \frac{F_i L}{AE} \quad (1.72)$$

Az egyenletrendszer megoldása pedig

$$F_1 = \frac{12}{21}F, F_2 = \frac{6}{21}F, F_3 = \frac{3}{21}F$$

A nyomatéki ábra pedig



1.49. ábra. Nyomatéki ábra

38. Feladat

A végtelen merev test a C csuklóval és a két rúddal van rögzítve. A rudak geometriai mérete és anyaga azonos (A , E). $F=8000$ N.

- Határozza meg az egyes rudakban ébredő erőket!
- Határozza meg a C csuklóban ébredő erőt!

Az nyomatéki egyensúly felírható

$$aF_1 + 2aF_2 - 3aF = 0 \quad (1.73)$$

A hosszváltozások pedig

$$\lambda_i = \frac{F_i L}{AE} \quad (1.74)$$

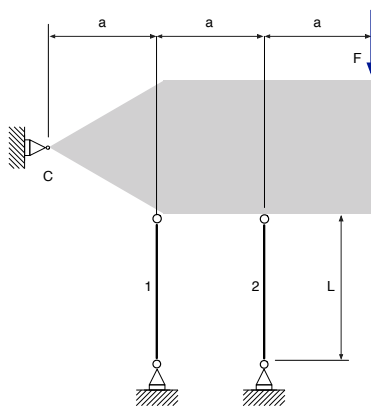
A megoldás pedig

$$F_2 = \frac{6F}{5} = 9600\text{N}, F_1 = \frac{F_2}{2} = 4800\text{N}$$

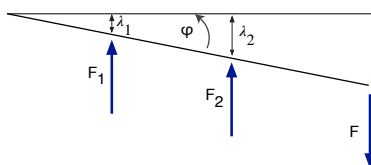
. A erőegyensúly alapján

$$C + F_1 + F_2 - F = 0 \rightarrow C = -6400\text{N} \quad (1.75)$$

1. HÚZÁS



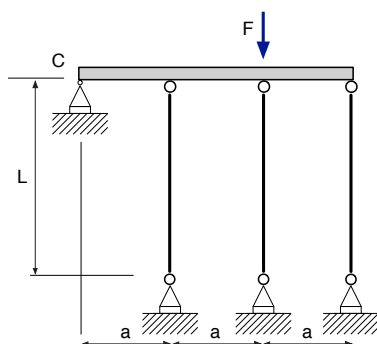
1.50. ábra. Merev gerenda



39. Feladat

A végtelen merev test a C csuklóval és három rúddal van rögzítve. A rudak geometriai mérete és anyaga azonos (A, E).

(a) Határozza meg az egyes rudakban ébredő erőket!



1.51. ábra. Merev gerenda

Az egyes nyúlások felírhatók

$$\lambda_i = \frac{F_i L}{AE} \quad (1.76)$$

valamint

$$\lambda_1 = a\varphi \quad (1.77)$$

$$\lambda_2 = 2a\varphi \quad (1.78)$$

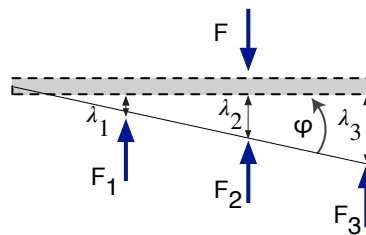
$$\lambda_3 = 3a\varphi \quad (1.79)$$

$$(1.80)$$

Nyomatéki egyenlet és erőegyenlő

$$aF_1 + 2aF_2 + 3aF_3 - 2aF = 0 \quad (1.81)$$

$$F_1 + F_2 + F_3 - F = 0 \quad (1.82)$$



1.52. ábra. Merev gerenda

A megoldás pedig

$$F_1 = \frac{F}{7}, F_2 = \frac{2F}{7}, F_3 = \frac{3F}{7}$$

40. Feladat

A végtelen merev test két rúddal van rögzítve. M nyomaték terheli. A rudak keresztmetszete és anyaga azonos (A , E). $F_1 = F_2 = \frac{M}{a}$

(a) Határozza meg, hogy a merev test alsó éle mennyivel fordul el!

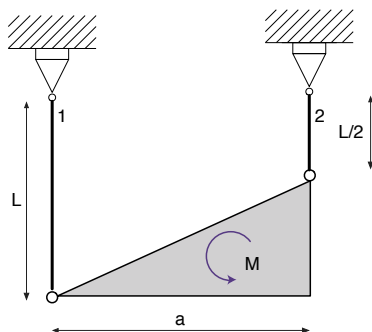
Az egyes nyúlások felírhatók

$$\lambda_i = \frac{F_i L}{AE}, \lambda_1 = \frac{F_1 L}{AE}, \lambda_2 = \frac{F_2 \frac{L}{2}}{AE} \quad (1.83)$$

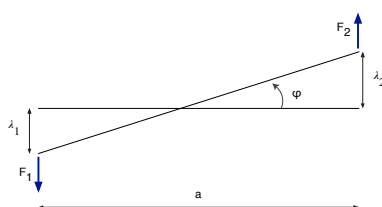
valamint

$$\tan \varphi = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{a} = \frac{3}{2} \frac{ML}{a^2 AE} \quad (1.84)$$

1. HÚZÁS



1.53. ábra. Merev lemez



41. Feladat

A végtelen merev test három rúddal van rögzítve. A rudak anyaga azonos (E), hosszuk és keresztmetszetük különböző.

- Határozza meg az egyes rudakban ébredő erőket!
- Határozza meg az egyes rudak megnyúlását!

Az egyes nyúlások felírhatók

$$\lambda_i = \frac{F_i L}{AE} \quad (1.85)$$

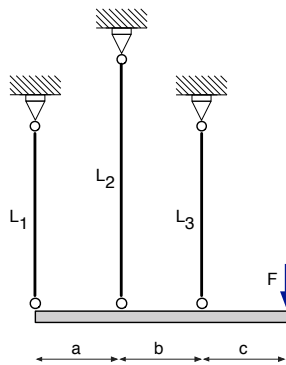
valamint a hasonló háromszögek alapján

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{a + b} \quad (1.86)$$

Nyomatéki egyenlet és erőegyensúly

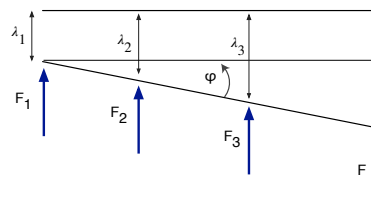
$$aF_2 + (a + b)F_3 - (a + b + c)F = 0 \quad (1.87)$$

$$F_1 + F_2 + F_3 - F = 0 \quad (1.88)$$



Adatok	
E	70 GPa
F	60000 N
A ₁	12 cm ²
A ₂	8 cm ²
A ₃	6 cm ²
L ₁	3 m
L ₂	4 m
L ₃	2 m
a	8 m
b	5 m
c	2 m

1.54. ábra. Merev gerenda



Az egyenletrendszer megoldása pedig

$$\lambda_1 = -1.014\text{mm}, \lambda_2 = 1.198\text{mm}, \lambda_3 = 3.41\text{mm}, F_1 = 28.400\text{N},$$

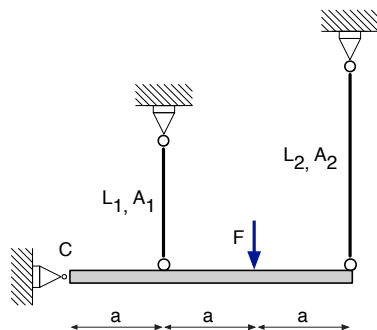
$$F_2 = 16.770\text{N}, F_3 = 71.630\text{N}$$

42. Feladat

A végtelen merev test a C csuklóban és két rúddal van rögzítve. A rudak anyaga azonos (E), hosszuk és keresztmetszetük különböző. Adott A_1, A_2, L_1, L_2, E, a .

(a) Mekkora F erővel kell terhelni, hogy a rúd φ_0 szöggel forduljon el!

1. HÚZÁS



1.55. ábra. Merev gerenda

A megnyúlások

$$\lambda_i = \frac{F_i L_i}{A_i E} \quad (1.89)$$

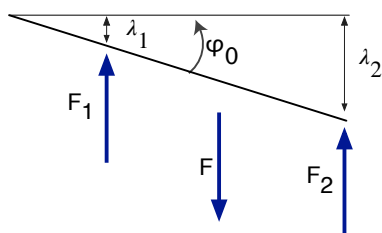
Ezzel

$$F_1 = \frac{\lambda_1 A_1 E}{L_1} = \frac{a \varphi_0 A_1 E}{L_1} \quad (1.90)$$

$$F_2 = \frac{\lambda_2 A_2 E}{L_2} = \frac{3a \varphi_0 A_2 E}{L_2} \quad (1.91)$$

Nyomatéki egyenlet

$$aF_1 + 3aF_2 - 2aF = 0 \quad (1.92)$$



1.56. ábra. Merev gerenda

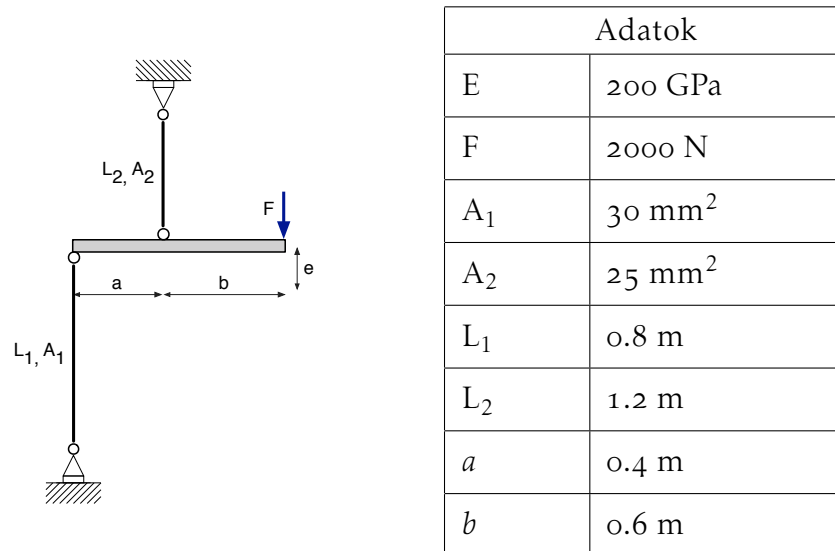
A megoldás pedig

$$F = \frac{\varphi_0 E}{2a} \left(\frac{A_1 a^2}{L_1} + \frac{A_2 a^2}{L_2} \right)$$

43. Feladat

A végtelen merev test két rúddal van rögzítve. A rudak anyaga azonos (E), hosszuk és keresztmetszetük különböző.

(a) Határozza meg az erő támadáspontjának elmozdulását!



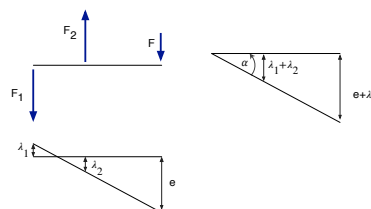
1.57. ábra. Merev gerenda

A nyomatéki egyensúly és a hosszváltozások

$$F(a + b) - F_2 a = 0 \quad (1.93)$$

$$\lambda_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E} = 0.4 \text{ mm} \quad (1.94)$$

$$\lambda_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E} = 1.2 \text{ mm} \quad (1.95)$$



Az erő támadáspontjának elmozdulása pedig

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{a} \quad (1.96)$$

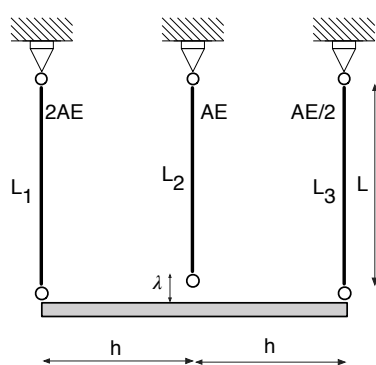
$$e = (a + b) \tan \alpha - \lambda_1 = 3.6 \text{ mm} \quad (1.97)$$

1. HÚZÁS

44. Feladat

A végtelen merev test két rúddal van rögzítve. A 2-es rúd az összeszerelés előtt λ -val rövidebb. A rudak anyaga azonos (E), hosszuk és keresztmetszetük különböző.

(a) Határozza meg a rudak hosszváltozását az összeszerelés után!



1.58. ábra. Merev gerenda

Az egyes hosszváltozások

$$\lambda_i = \frac{F_i L_i}{AE} \quad (1.98)$$

Egyensúly miatt

$$F_1 = F_3 = F, \rightarrow F_2 = 2F$$

A szélső rudakban

$$\frac{F}{2}$$

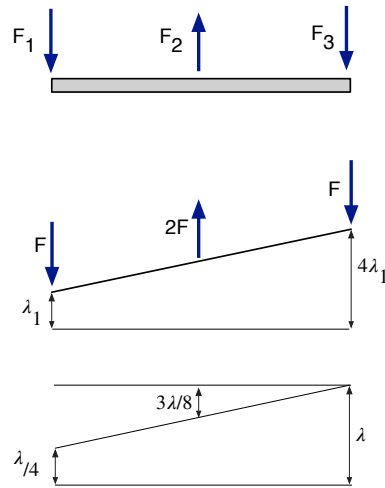
erő ébred.

$$\lambda_1 = \frac{\frac{F}{2}L}{2AE} = \frac{FL}{4AE} = \frac{\lambda}{4} \quad (1.99)$$

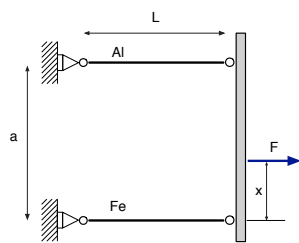
$$\lambda_2 = \frac{\frac{F}{2}L}{\frac{AE}{2}} = \frac{FL}{AE} = \lambda \quad (1.100)$$

45. Feladat

A végtelen merev test két rúddal van rögzítve. Az egyik alumínium, a másik acél.



(a) Hol kell megterhelni a merev testet, hogy az függőleges helyzetű maradjon?



Adatok	
E_{Fe}	210 GPa
E_{Al}	70 GPa
A_{Al}	20 mm ²
A_{Fe}	20 mm ²
a	0.4 m
L	0.5 m

1.59. ábra. Merev gerenda

Az egyes megnyúlások azonosak lesznek $\lambda_{Al} = \lambda_{Fe}$, vagyis

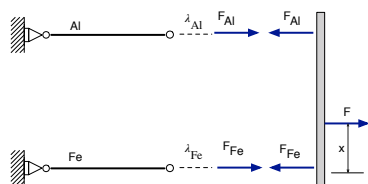
$$\lambda_{Al} = \frac{F_{Al}L}{A_{Al}E_{Al}} \quad (1.101)$$

$$\lambda_{Fe} = \frac{F_{Fe}L}{A_{Fe}E_{Fe}} \quad (1.102)$$

Az egyensúly miatt

$$F_{Al}a - F(a - x) = 0 \quad (1.103)$$

1. HÚZÁS



A megoldás pedig

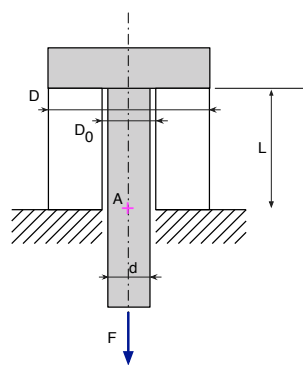
$$x = 100\text{mm}, F_{Al} = \frac{F}{4}, F_{Fe} = \frac{3F}{4}$$

46. Feladat

Egy L hosszúságú hüvelyben egy $\varnothing d$ átmérőjű csavart dugunk keresztül. Terheletlen állapotban az A pont a megtámasztó síkkal esik egy vonalba. A csavar alsó végére F terhelő erőt adunk, aminek hatására az A pont $\lambda = 0.3$ mm-rel elmozdul függőlegesen.

(a) Mekkora F ?

(b) Mekkora feszültség ébred a csavarban és a hüvelyben?



Adatok	
E	210 GPa
d	14 mm
D	30 mm
D_0	15 mm
L	0.2 m

1.60. ábra. Csavarkötés

Az A pont elmozdulása két részből tevődik össze. Egyrészt a hüvely összenyomódik, másrészt a csavar megnyúlik.

$$\lambda_h = \frac{FL}{A_h E} \quad (1.104)$$

$$\lambda_{cs} = \frac{FL}{A_{cs} E} \quad (1.105)$$

$$\lambda = \lambda_h + \lambda_{cs} = 0.3\text{mm} \quad (1.106)$$

Ebből

$$F = \frac{\lambda E}{\left(\frac{1}{A_h} + \frac{1}{A_{cs}}\right)L} = 37600\text{N}$$

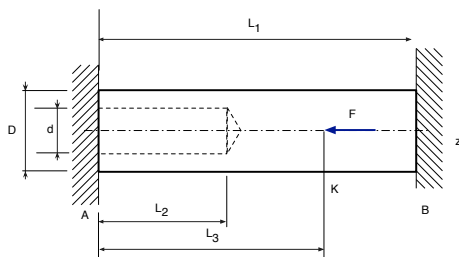
A feszültségek

$$\sigma_h = -\frac{F}{A_h} = -71\text{MPa}, \sigma_{cs} = \frac{F}{A_{cs}} = 244.4\text{MPa}$$

47. Feladat

Két végén befogott D átmérőjű, egyik végén kifűrt rudat a kijelölt keresztmetszetben F erő terheli.

- (a) Határozza meg a kényszererőket!
- (b) Határozza meg a K keresztmetszet elmozdulását!
- (c) Mekkora feszültség ébred az egyes szakaszokban?



Adatok	
E	210 GPa
d	16 mm
D	20 mm
L_1	800 mm
L_2	0.2 m
L_3	0.4 m
F	100000 N

1.61. ábra. Merev befogás

Az egyes hosszváltozások kapcsolata

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3 \tag{1.107}$$

1. HÚZÁS

Részletesen

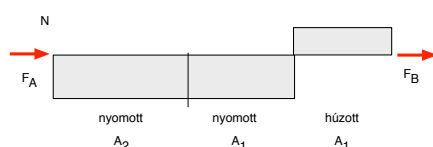
$$\lambda_1 = \frac{F_B (L_1 - L_3)}{A_1 E} \quad (1.108)$$

$$\lambda_2 = \frac{F_A L_2}{A_2 E} \quad (1.109)$$

$$\lambda_1 = \frac{F_A (L_3 - L_2)}{A_1 E} \quad (1.110)$$

Az egyensúly miatt továbbá

$$F_A + F_B = F \quad (1.111)$$



A megoldás ezzel

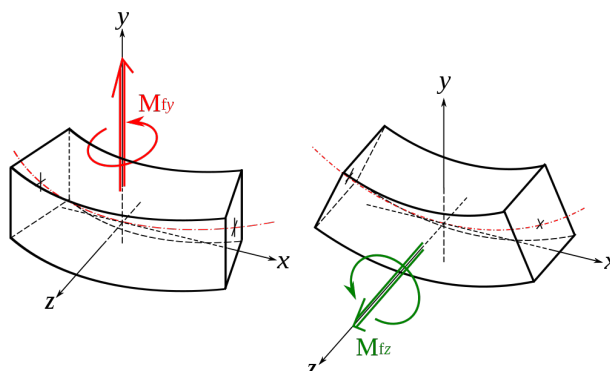
$$F_A = 0.35F, F_B = 0.65F, \lambda_K = \frac{F_B (L_1 - L_3)}{A_1 E} = 0.61 \text{ mm}$$

A feszültségek pedig rendre

$$\sigma_z = \frac{F_A}{A_2} = 309.6 \text{ MPa}, \sigma_z = \frac{F_A}{A_1} = 111.5 \text{ MPa}, \sigma_z = \frac{F_B}{A_1} = 207 \text{ MPa}$$

2.1. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a hajlítással foglalkoztunk. Tiszta hajlítás esetén nem lép fel nyíró igénybevétel. Rúd tisztán nyomaték által való hajlítása látható a 2.1 ábrán. Tiszta hajlítás esetén a semleges szál (szaggatott vonal) hossza nem



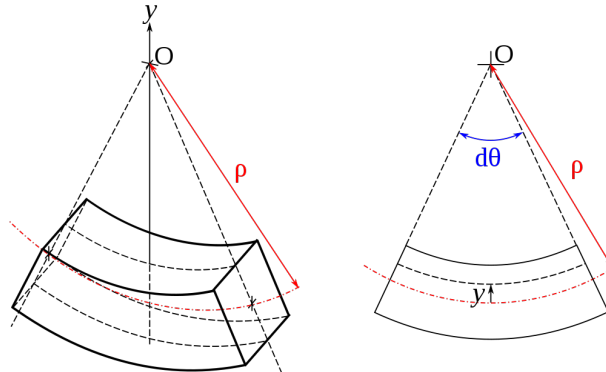
2.1. ábra. Hajlítás különböző tengelyek körül (wikipedia)

változik és feszültség sem ébred a keresztmetszetnek ebben a pontjában. A hosszirányú fajlagos hosszváltozás pedig

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (2.1)$$

ahol $\rho \equiv R$ a görbületi sugár (lásd 2.2 ábra).

2. HAJLÍTÁS

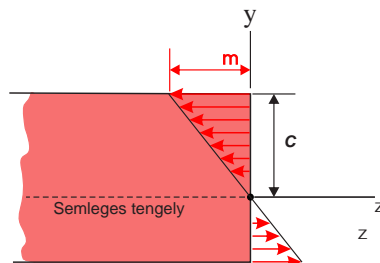


2.2. ábra. Hajlítás esetén a görbület (wikipedia)

A görbületi sugár reciproka pedig

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{IE} \quad (2.2)$$

ahol I a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomaték. A feszültség eloszlása látható a 2.3 ábrán. A keresztmetszetben a feszültségmentes helye-



2.3. ábra. Hajlítás esetén a feszültség eloszlása

ket összekötő rész a semleges tengely. A feszültség nagysága innen számolva lineárisan változik a

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} \quad (2.3)$$

képlet szerint. Az ábra szerint a legnagyobb feszültség

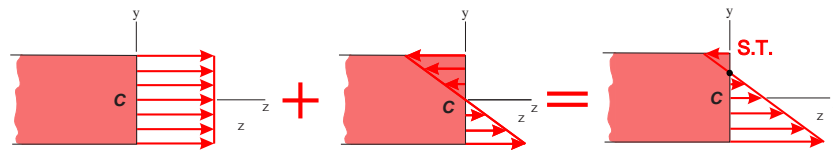
$$\sigma_{max.} = \frac{M_x c}{I_x} \quad (2.4)$$

Külponos/nem középponti húzás/nyomás esetén amikor a terhelés nem megy át a keresztmetszet súlypontján a redukálás eredménye egy erő és nyo-

maték(ok). Ilyenkor a feszültség számítása a szuperpozíció miatt

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x y}{I_x} \quad (2.5)$$

szerint tehető meg. A 2.4 ábrán a két igénybevétel esetén kapott eredő feszültségeloszlás látható.



2.4. ábra. Húzás és hajlítás szuperpozíciója

Ferde hajlítás esetén a nyomaték vektor nem párhuzamos egyik főiránnyal sem. Ilyenkor a nyomatékot felbontjuk a főirányokkal párhuzamos komponenseire majd a továbbiakban egyenes hajlításként számolhatunk. A 2.5 ábrán egy ilyen eset látható. Az y tengely mivel szimmetriatengely ezért főirány is. A nyomaték vektor nem párhuzamos ezzel a tengellyel ezért fel kell bontani a főirányokkal (y, z) párhuzamos komponensekre. Ezzel a feladat egyenes hajlítások szuperpozíciójával megoldható. A kérdéses pontokban a húzott nyomott oldal eldöntése után lehet a feszültséget számolni

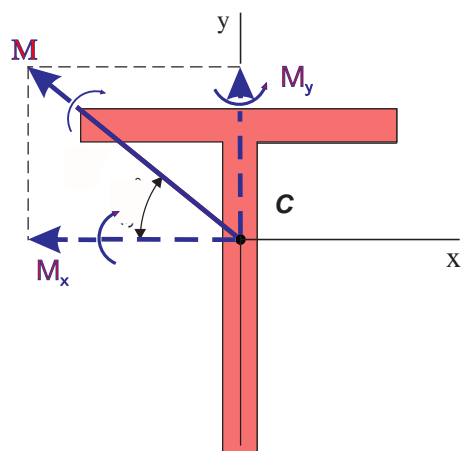
$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} \quad (2.6)$$

A semleges tengely meghatározható a

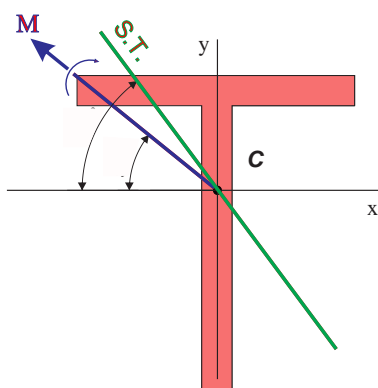
$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \Theta \quad (2.7)$$

képlet segítségével. Az összefüggésben a számlálóban a nagyobb főmásodrendű nyomaték szerepel, valamint a nyomaték és a nagyobb főmásodrendű nyomaték tengelye közötti szög Θ . Ezért a semleges tengely mindig a nyomaték és a kisebb főmásodrendű nyomaték tengelye közé esik, ami most az y tengely (lásd 2.6 ábra).

2. HAJLÍTÁS

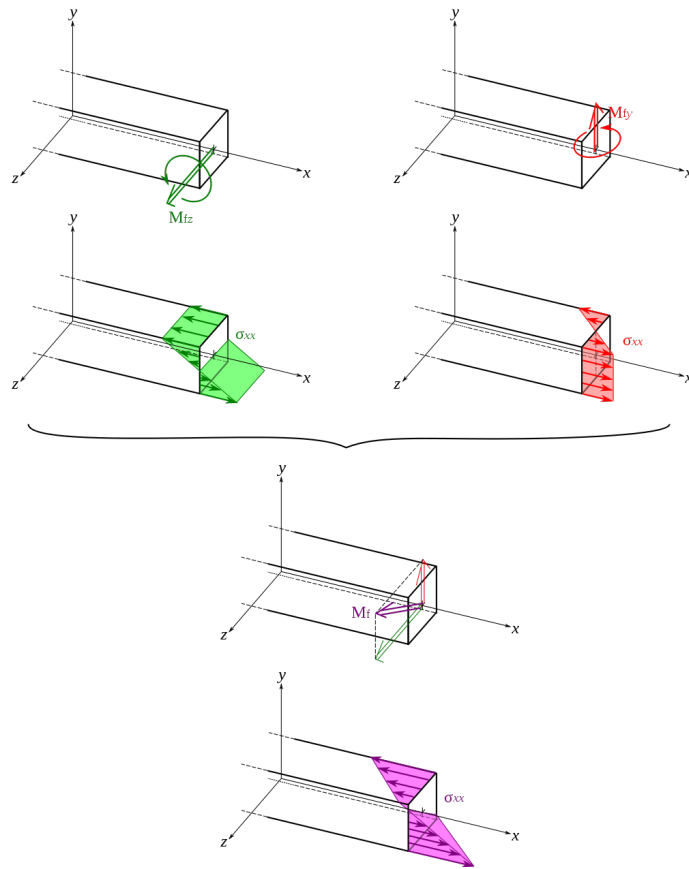


2.5. ábra. Ferde hajlítás esete



2.6. ábra. A semleges tengely helyzete

Ferde hajlítás esetén a két tengely körüli hajlítás szuperpozíciója látható a 2.7 ábrán.



2.7. ábra. Hajlítás különböző tengelyek körül (wikipedia)

1. Feladat

Az alábbi üreges téglalap keresztmetszetű tartó alumíniumból készült. Adott megengedett feszültség mellett

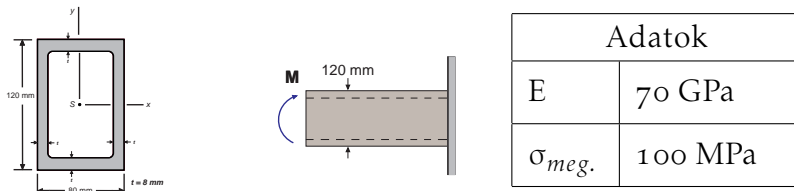
- határozza meg a legnagyobb nyomaték M értékét és
- a görbületi sugarat!

Megoldás

A keresztmetszet hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka

$$I_x = 5.52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.8)$$

2. HAJLÍTÁS



2.8. ábra. Hajlítás

A nyomaték pedig

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \leq \rightarrow M_x = \frac{I_x \sigma_{meg.}}{0.06} = 9.2 \text{ kNm} \quad (2.9)$$

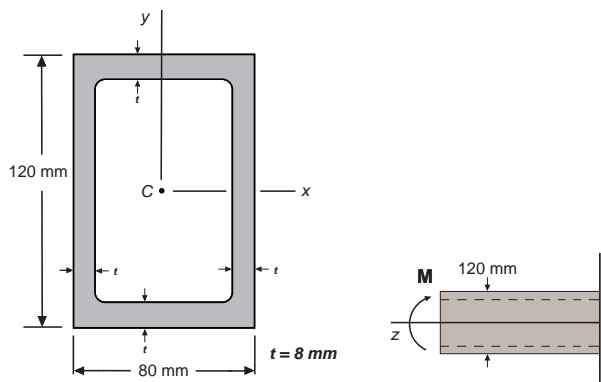
A görbületi sugár

$$\frac{1}{R} = \frac{M_x}{I_x E} \rightarrow R = 42 \text{ m} \quad (2.10)$$

2. Feladat

Az alábbi üreges téglalap keresztmetszetű tartó alumíniumból készült.

- (a) Határozza meg a feszültséget az A pontban!
- (b) Határozza meg a feszültséget a B pontban!



2.9. ábra. Hajlítás

Megoldás

A keresztmetszet hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka

$$I_x = 9.81 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.11)$$

A feszültség a kérdéses pontokban pedig

$$\sigma_z^A = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{40M_x}{I_x} = -61.2 \text{ MPa} \quad (2.12)$$

$$\sigma_z^B = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{60M_x}{I_x} = 91.7 \text{ MPa} \quad (2.13)$$

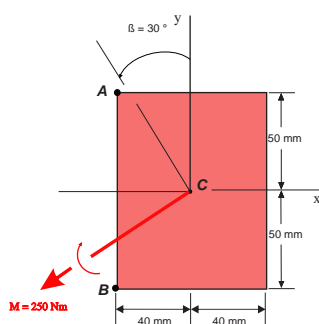
2. HAJLÍTÁS

3. Feladat

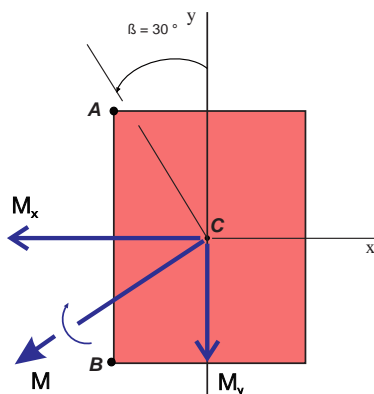
Az alábbi téglalap keresztmetszetű tartó acélból készült. Adott a hajlító nyomaték nagysága és iránya.

(a) Határozza meg a feszültséget az A pontban!

(b) Határozza meg a feszültséget a B pontban!



2.10. ábra. Ferde hajlítás



2.11. ábra. A nyomaték felbontása

Megoldás

Mivel mind az y , mind az x tengely szimmetriatengely ezért ezek egyben főirányok is. A nyomaték vektor nem esik egybe egyik súlyponti főiránnyal sem ezért ferde hajlításról van szó. A megoldás során a hajlítást a főirányok koordináta-rendszerében oldjuk meg visszavezetve két tengely körüli egyenes hajlítás szuperpozíciójára.

A keresztmetszet hajlítás tengelyeire számított másodrendű nyomatékai

$$I_x = 6.66 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \quad I_y = 4.266 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.14)$$

A nyomaték komponensei a hajlítás tengelyeire

$$M_y = M \sin \beta = 125 \text{ Nm}, \quad M_x = M \cos \beta = 216.51 \text{ Nm} \quad (2.15)$$

A feszültség a kérdéses pontokban pedig

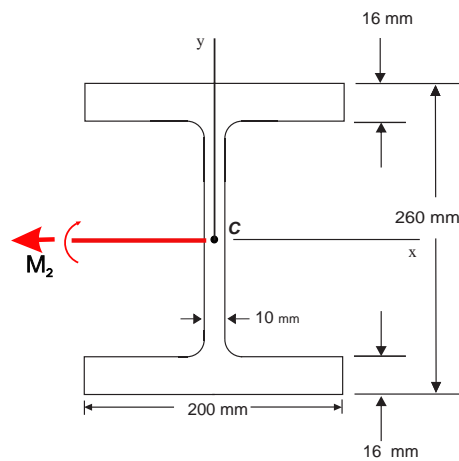
$$\sigma_z^A = -\frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y z}{I_y} = -2.796 \text{ MPa} \quad (2.16)$$

$$\sigma_z^B = \frac{M_x y}{I_z} - \frac{M_y z}{I_y} = 0.452 \text{ MPa} \quad (2.17)$$

4. Feladat

Az alábbi I tartó acélból készült. Adott a megengedett feszültség $\sigma_{meg.} = 160$ MPa.

(a) Mekkora lehet a nyomaték legfeljebb?



2.12. ábra. Hajlított I tartó

Megoldás

A szelvény hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka táblázatból

$$I_x = 95.437 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.18)$$

A nyomaték pedig

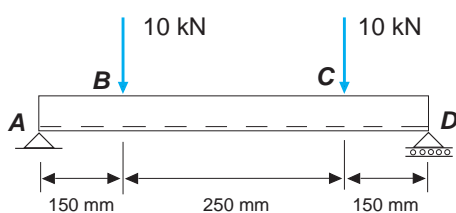
$$M_x = \frac{\sigma_{meg.} \cdot I_x}{y} = 117.46 \text{ kNm} \quad (2.19)$$

2. HAJLÍTÁS

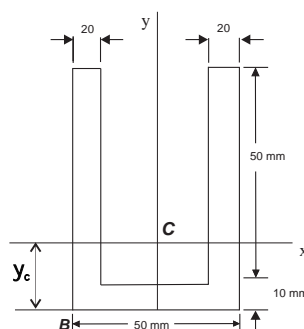
5. Feladat

Az alábbi tartót koncentrált erő terhel.

- (a) Határozza meg a BC szakaszon a legnagyobb nyomó feszültséget!
- (b) Határozza meg a BC szakaszon a legnagyobb húzó feszültséget!



2.13. ábra. Hajlított tartó



2.14. ábra. A tartó keresztmetszete

Megoldás

A súlypont helyzete

$$y_s = \frac{50 \cdot 60 \cdot 30 - 10 \cdot 50 \cdot 35}{50 \cdot 60 - 10 \cdot 50} = 29 \text{ mm} \quad (2.20)$$

A másodrendű nyomaték

$$I_x = 780.83 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \quad (2.21)$$

A BC szakaszon a nyomaték nagysága $M=1500 \text{ Nm}$. A feszültség ezzel

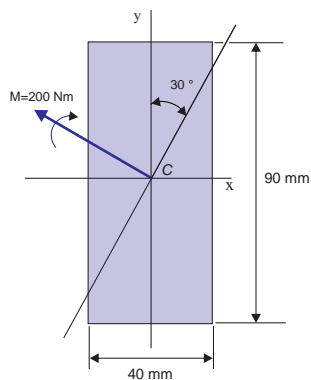
$$\sigma_z^A = \frac{M_x y}{I_x} = -59.55 \text{ MPa} \quad (2.22)$$

$$\sigma_z^B = \frac{M_x y}{I_x} = 55.71 \text{ MPa} \quad (2.23)$$

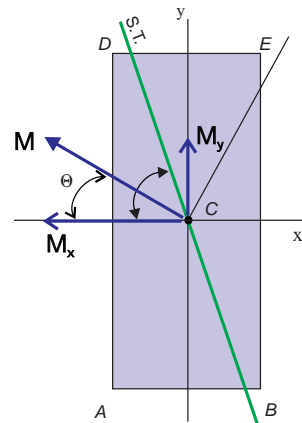
6. Feladat

Ismert a keresztmetszet hajlító igénybevétele $M=200 \text{ Nm}$, valamint a méretei.

(a) Határozza meg az A, B, D és E pontokban a feszültséget!



2.15. ábra. Hajlított tartó



2.16. ábra. Semleges tengely helyzete

Megoldás

A nyomaték főirányokkal párhuzamos vetületei

$$M_x = M \cos 30 = 173.2 \text{ Nm} \quad (2.24)$$

$$M_y = M \sin 30 = 100 \text{ Nm} \quad (2.25)$$

A másodrendű nyomatékok pedig

$$I_y = 0.48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.26)$$

$$I_x = 2.43 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.27)$$

2. HAJLÍTÁS

A feszültség pedig a kérdéses pontban

$$\sigma_z^A = \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 7.38 \text{ MPa} \quad (2.28)$$

$$\sigma_z^B = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = -0.957 \text{ MPa} \quad (2.29)$$

$$\sigma_z^D = -\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0.957 \text{ MPa} \quad (2.30)$$

$$\sigma_z^E = -\frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = -7.38 \text{ MPa} \quad (2.31)$$

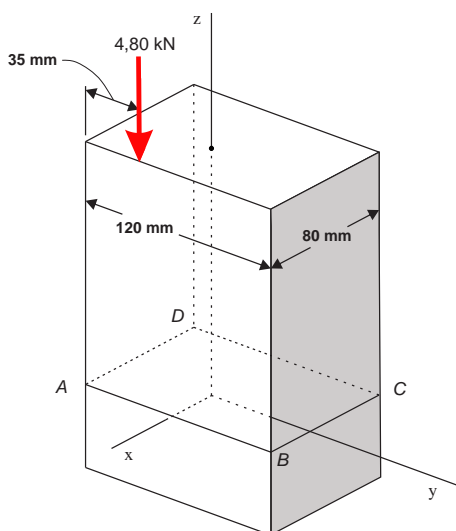
A semleges tengely helyzete

$$\tan \phi = \frac{I_x}{I_y} \tan \Theta \rightarrow \phi = 71.1 \text{ deg} \quad (2.32)$$

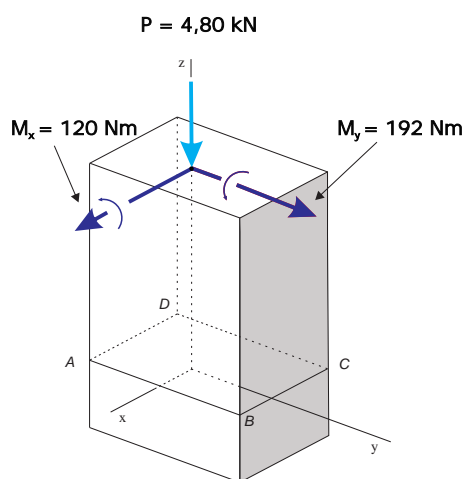
7. Feladat

Egy téglalap keresztmetszetű oszlopot koncentrált erő terhel.

(a) Határozza meg az A, B, C és D pontokban a feszültséget!



2.17. ábra. Hajlított oszlop



2.18. ábra. A redukálás eredménye

Megoldás

Az erő redukálása a keresztmetszet súlypontjába

$$M_y = 0.04 \cdot P = 192 \text{ Nm} \quad (2.33)$$

$$M_x = 0.025 \cdot P = 120 \text{ Nm} \quad (2.34)$$

Vagyis a feladat ferde hajlítás és nyomás szuperpozíciójával oldható meg. A szimmetriatengelyek egyben főirányok is. A szükséges másodrendű nyomatékok és a felület pedig

$$A = 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (2.35)$$

$$I_y = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.36)$$

$$I_x = 11.52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.37)$$

A nyomás miatt a keresztmetszet minden pontjában

$$\sigma_z^1 = -\frac{P}{A} = -0.5 \text{ MPa} \quad (2.38)$$

a feszültség. A hajlításból származó feszültségek pedig

$$\sigma_z^2 = \frac{M_y x}{I_y} = 1.5 \text{ MPa} \quad (2.39)$$

$$\sigma_z^3 = \frac{M_x y}{I_x} = 0.625 \text{ MPa} \quad (2.40)$$

Az egyes pontokban a feszültség

$$\sigma_z = \sigma_z^1 \pm \sigma_z^2 \pm \sigma_z^3 \quad (2.41)$$

ahol az előjel a húzott/nyomott oldal eldöntése után adódik. Ezzel a kérdéses pontokban a feszültség

$$\sigma_A = -0.5 - 1.5 - 0.625 = -2.625 \text{ MPa} \quad (2.42)$$

$$\sigma_B = -0.5 - 1.5 + 0.625 = -1.375 \text{ MPa} \quad (2.43)$$

$$\sigma_C = -0.5 + 1.5 + 0.625 = 1.625 \text{ MPa} \quad (2.44)$$

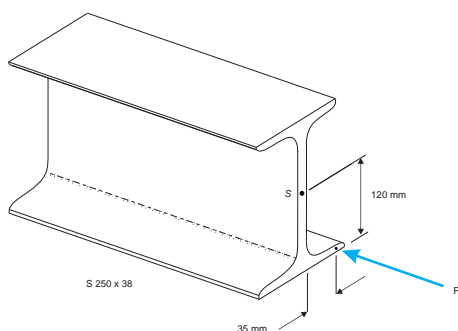
$$\sigma_D = -0.5 + 1.5 - 0.625 = 0.375 \text{ MPa} \quad (2.45)$$

2. HAJLÍTÁS

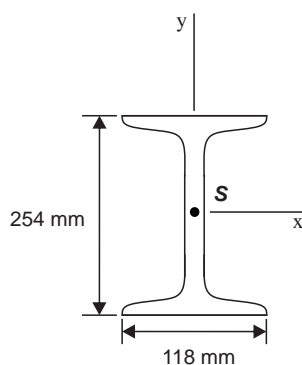
8. Feladat

Egy 250x38-as szabványos I tartót koncentrált erő terhel. A megengedett feszültség $\sigma_{meg.} = 80 \text{ MPa}$.

(a) Határozza meg a megengedhető legnagyobb erő értékét!

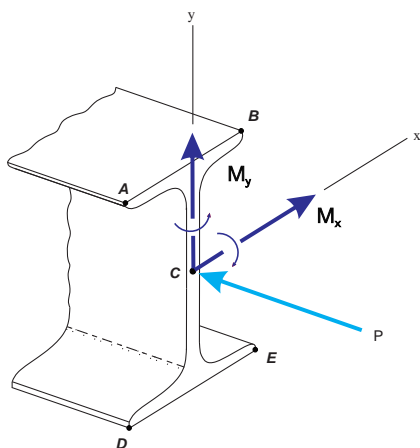


2.19. ábra. Hajlított I tartó



2.20. ábra. A keresztmetszet méretei

Megoldás



2.21. ábra. A redukálás eredménye

A szabvány szerinti felület és keresztmetszeti tényező értékek

$$A = 4806 \text{ mm}^2 \quad (2.46)$$

$$K_x = 406000 \text{ mm}^3 \quad (2.47)$$

$$K_y = 48000 \text{ mm}^3 \quad (2.48)$$

A redukálás eredménye egy erő és

$$M_x = 0.12P \quad (2.49)$$

$$M_y = 0.035P \quad (2.50)$$

nyomatékok. A nyomás miatt minden pontban a feszültség

$$\sigma_z^1 = \frac{P}{A} = 208.1P \quad (2.51)$$

a feszültség. A hajlításból származó feszültségek pedig

$$\sigma_z^2 = \frac{M_x}{K_x} = 295.6P \quad (2.52)$$

$$\sigma_z^3 = \frac{M_y}{K_y} = 729.2P \quad (2.53)$$

Az egyes pontokban a feszültség

$$\sigma_z = \sigma_z^1 \pm \sigma_z^2 \pm \sigma_z^3 \quad (2.54)$$

ahol az előjel a húzott/nyomott oldal eldöntése után adódik. Ezzel a kérdéses pontokban a feszültség

$$\sigma_z^A = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 816.7P \quad (2.55)$$

$$\sigma_z^B = -\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 = -641.7P \quad (2.56)$$

$$\sigma_z^D = -\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 = 225.5P \quad (2.57)$$

$$\sigma_z^E = -\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = -1232.9P \quad (2.58)$$

A legnagyobb feszültség az E pontban ébred, vagyis

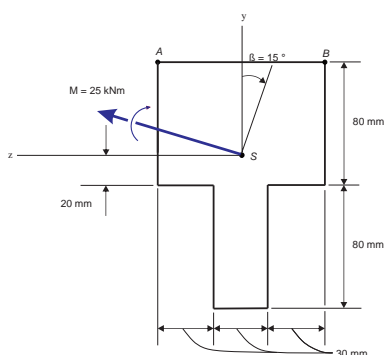
$$\sigma_{meg.} = \sigma_z^E \rightarrow P = 64.9\text{kN} \quad (2.59)$$

2. HAJLÍTÁS

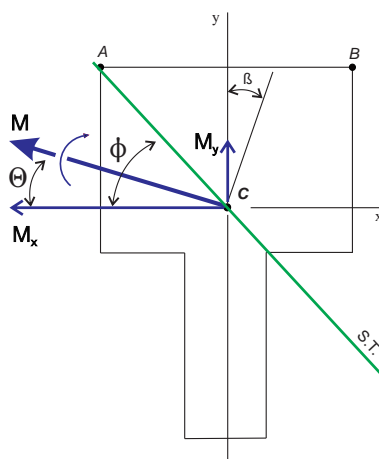
9. Feladat

Adott a tartó keresztmetszete és a hajlító igénybevétel M .

- Határozza meg a feszültséget az A és a B pontokban!
- Határozza meg a semleges tengely helyzetét!



2.22. ábra. Hajlított tartó



2.23. ábra. A semleges tengely helyzete

Megoldás

A nyomaték felbontása a főirányokkal párhuzamos komponensekre

$$M_y = M \sin \beta = 6.47 \text{ kNm} \quad (2.60)$$

$$M_x = M \cos \beta = 24.148 \text{ kNm} \quad (2.61)$$

A másodrendű nyomatékok a hajlítás tengelyére

$$I_y = 5.04 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.62)$$

$$I_x = 16.64 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.63)$$

A feszültségek pedig a kérdéses pontokban

$$\sigma_z^A = \frac{M_y x}{I_y} - \frac{M_x y}{I_x} = -29.3 \text{ MPa} \quad (2.64)$$

$$\sigma_z^B = -\frac{M_y x}{I_y} - \frac{M_x y}{I_x} = -144.8 \text{ MPa} \quad (2.65)$$

A semleges tengely helyzete pedig

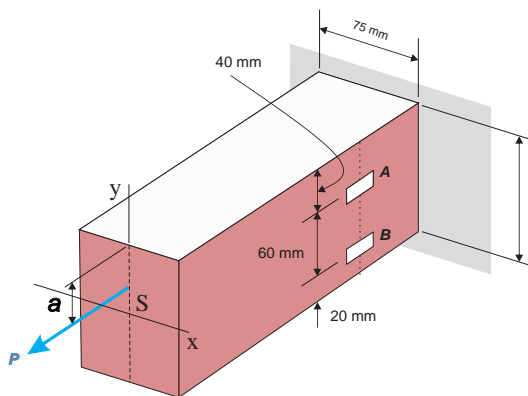
$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \beta \rightarrow \phi = 41.5 \text{ deg} \quad (2.66)$$

10. Feladat

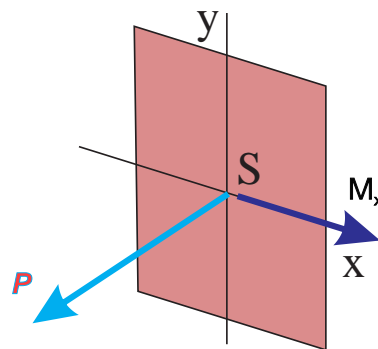
A szerkezetet egy koncentrált erő terhel a súlyponttól "a" távolságra. Két pontban A és B ismert a fajlagos hosszváltozás $\varepsilon_z^A = 600 \mu$, $\varepsilon_z^B = 450 \mu$. A rugalmassági modulusz $E=200 \text{ GPa}$.

(a) Határozza meg az erő nagyságát!

(b) Határozza meg az erő helyzetét!



2.24. ábra. Hajlított tartó



2.25. ábra. A redukálás eredménye

Megoldás

A terhelő erőt a keresztmetszet súlypontjába redukálva egy erő és egy nyomaték adódik

$$M_x = y \cdot P \quad (2.67)$$

ahol $y=60-a$. A keresztmetszet és a másodrendű nyomaték a hajlítás tengelyére

$$A = 9000 \text{ mm}^2 \quad (2.68)$$

$$I_x = 10.8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.69)$$

2. HAJLÍTÁS

A húzás miatt σ_z^0 , a hajlítás miatt σ_z^1 feszültség ébred

$$\sigma_z^0 = \frac{P}{A} \quad (2.70)$$

$$\sigma_z^1 = \frac{M_x y}{I_x} \quad (2.71)$$

Feszültség az A és B pontokban

$$\sigma_z^A = \sigma_z^0 + \frac{20M_x}{I_x} = E\varepsilon_z^A \quad (2.72)$$

$$\sigma_z^B = \sigma_z^0 - \frac{40M_x}{I_x} = E\varepsilon_z^B \quad (2.73)$$

Az egyenletrendszer megoldása

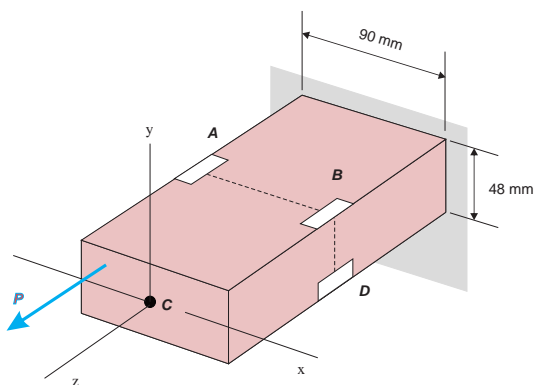
$$P = 990 \text{ kN} \quad (2.74)$$

$$y = \frac{60}{11} \text{ mm} \rightarrow a = \frac{600}{11} \text{ mm} \quad (2.75)$$

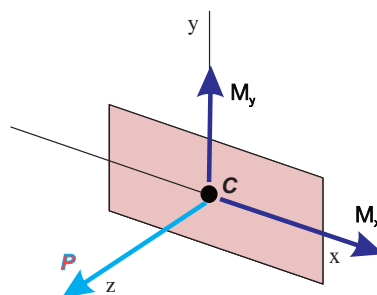
11. Feladat

A szerkezetet egy koncentrált erő terhel. Három pontban A, B és D ismert a fajlagos hosszváltozás $\varepsilon_z^A = 800 \mu$, $\varepsilon_z^B = 400 \mu$, $\varepsilon_z^D = 200 \mu$. A rugalmassági modulusz $E=200 \text{ GPa}$.

- Határozza meg az erő nagyságát!
- Határozza meg az erő helyzetét!



2.26. ábra. Hajlított tartó



2.27. ábra. A redukálás eredménye

Megoldás

A terhelő erőt a keresztmetszet súlypontjába redukálva egy erő és nyomaték adódik

$$M_x = yP \quad (2.76)$$

$$M_y = xP \quad (2.77)$$

$$P \quad (2.78)$$

A keresztmetszet és a másodrendű nyomatékok

$$A = 4320 \text{ mm}^2 \quad (2.79)$$

$$I_x = 829.44 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \quad (2.80)$$

$$I_y = 2.916 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.81)$$

A húzás miatt σ_z^0 , a hajlítás miatt σ_z^1 és σ_z^2 feszültség ébred

$$\sigma_z^0 = \frac{P}{A} \quad (2.82)$$

$$\sigma_z^1 = \frac{24M_x}{I_x} \quad (2.83)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{45M_y}{I_y} \quad (2.84)$$

Feszültség az A,B és D pontokban felhasználva a Hooke törvényt

$$\sigma_z^A = \sigma_z^0 + \sigma_z^1 + \sigma_z^2 = E\epsilon_z^A \quad (2.85)$$

$$\sigma_z^B = \sigma_z^0 + \sigma_z^1 - \sigma_z^2 = E\epsilon_z^B \quad (2.86)$$

$$\sigma_z^D = \sigma_z^0 - \sigma_z^1 - \sigma_z^2 = E\epsilon_z^D \quad (2.87)$$

$$(2.88)$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$P = 432 \text{ kN} \quad (2.89)$$

$$y = \frac{8}{5} \text{ mm} \quad (2.90)$$

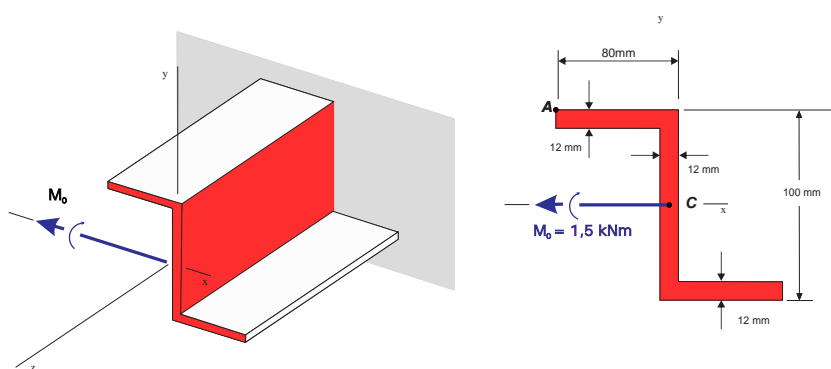
$$z = 6 \text{ mm} \quad (2.91)$$

2. HAJLÍTÁS

12. Feladat

A Z keresztmetszetű tartót M_0 nyomaték terheli. A másodrendű nyomatékok adottak.

- Határozza meg a feszültséget az A pontban!
- Határozza meg a semleges tengely helyzetét!

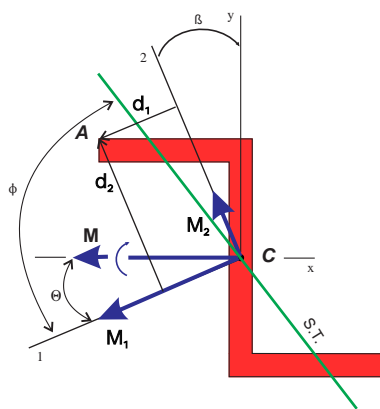


2.28. ábra. Hajlított tartó

Megoldás

A koordinátarendszerben a megadott másodrendű nyomatékok

$$I_y = 3.25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad I_x = 4.28 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad I_{yx} = -2.87 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.92)$$



2.29. ábra. A főirányok

A főmásodrendű nyomatékok és főirányok helyzete sajátérték-sajátvektor számítás eredményéből

$$I_1 = 6.63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.93)$$

$$I_2 = 0.81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2.94)$$

$$\beta = 40.4 \text{ deg} \quad (2.95)$$

ahol β az y tengely és a 2-es irány közötti szög.

A nyomaték felbontása a főirányokkal párhuzamos komponensekre

$$M_1 = M \cos \beta = 1142 \text{ Nm} \quad (2.96)$$

$$M_2 = M \sin \beta = 972 \text{ Nm} \quad (2.97)$$

Az A pont helyzete az egyes főirányok tengelyétől

$$d_1 = -y_A \sin \beta + x_A \cos \beta = 23.9 \text{ mm} \quad (2.98)$$

$$d_2 = y_A \cos \beta + x_A \sin \beta = 86 \text{ mm} \quad (2.99)$$

Az egyes tengelyek körüli hajlítás szuperpozíciójából az A pontban a feszültség

$$\sigma_2^A = \frac{M_2 d_1}{I_2} - \frac{M_1 d_2}{I_1} = 13.87 \text{ MPa} \quad (2.100)$$

A semleges tengely helyzete

$$\tan \phi = \frac{I_1}{I_2} \tan \beta \rightarrow \phi = 81.8 \text{ deg} \quad (2.101)$$

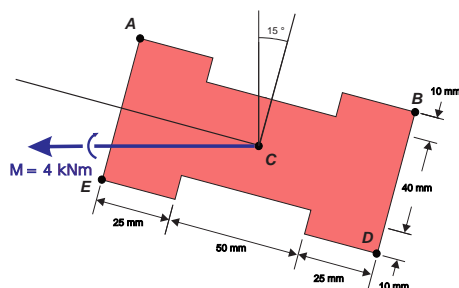
2. HAJLÍTÁS

13. Feladat

Az alábbi tartót M nyomaték terhel.

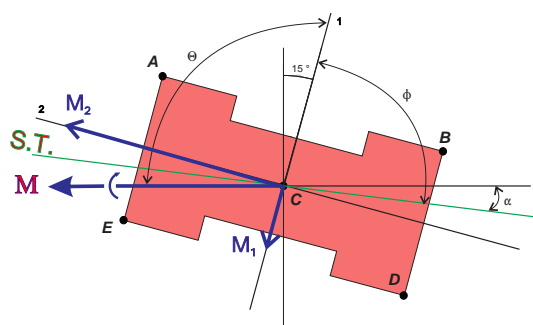
(a) Határozza meg a feszültséget az A, B, D és E pontokban!

(b) Határozza meg a semleges tengely helyzetét!



2.30. ábra. Hajlított tartó keresztmetszete

Megoldás



2.31. ábra. Nyomaték felbontása és a semleges tengely helyzete

A másodrendű nyomatékok a főirányok (emelyek most a szimmetria tengelyek) tengelyeire

$$I_1 = 4.792 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.102)$$

$$I_2 = 1.167 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.103)$$

A nyomaték felbontása a főirányokkal párhuzamos komponensekre

$$M_1 = M \sin 15 = 1035.28 \text{ Nm} \quad (2.104)$$

$$M_2 = M \cos 15 = 3863.7 \text{ Nm} \quad (2.105)$$

A feszültség az egyes pontokban pedig

$$\sigma_z^A = -\frac{0.03M_2}{I_2} - \frac{0.05M_1}{I_1} = -110.12 \text{ MPa} \quad (2.106)$$

$$\sigma_z^B = -\frac{0.03M_2}{I_2} + \frac{0.05M_1}{I_1} = -88.52 \text{ MPa} \quad (2.107)$$

$$\sigma_z^D = \frac{0.03M_2}{I_2} + \frac{0.05M_1}{I_1} = 110.12 \text{ MPa} \quad (2.108)$$

$$\sigma_z^E = \frac{0.03M_2}{I_2} - \frac{0.05M_1}{I_1} = 88.52 \text{ MPa} \quad (2.109)$$

A semleges tengely helyzete

$$\tan \phi = \frac{I_1}{I_2} \tan \Theta \rightarrow \phi = -86.27 \text{ deg} \quad (2.110)$$

A vízszintessel

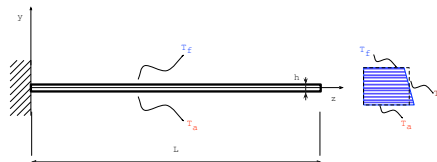
$$\alpha = 11.27 \text{ deg} \quad (2.111)$$

szöget zár be.

14. Feladat

Az L hosszúságú rúd alsó és felső része különböző hőmérsékletű, amelynek eloszlása lineáris.

- Mi a rúd görbült alakjának egyenlete?
- Mekkora nyomaték ébred a rúdban?



2.32. ábra. Hőmérséklet különbség hatása a görbületre

A hőmérséklet változása lineáris, tehát

$$\Delta T = T_k + (T_a - T_f) \frac{y}{h}, \quad (2.112)$$

2. HAJLÍTÁS

ahol h a rúd magassága, T_a, T_f a rúd alsó és a felső felületén a hőmérséklet. T_k a közéghőmérséklet, amely a rúd hosszának a változását okozza, jelen esetben, mivel a rúd jobb vége szabad, figyelmen kívül hagyható. A Hooke törvény alapján

$$\sigma_z = E\varepsilon - E\alpha\Delta T = E\varepsilon - E\alpha(T_a - T_f)\frac{y}{h}. \quad (2.113)$$

Felhasználva, hogy $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z}$, $u = y\psi$, $\psi = -w'$ írhatjuk

$$\sigma_z = -Ew''y - E\alpha(T_a - T_f)\frac{y}{h}. \quad (2.114)$$

A nyomaték

$$M = \int \sigma y \, dA$$

alapján számolható. Felhasználva $I_x = \int y^2 \, dA$ definícióját kapjuk, hogy

$$M = -I_x E w'' - EI_x \alpha \frac{T_a - T_f}{h}. \quad (2.115)$$

Más alakban

$$w'' = -\frac{M}{I_x E} - \alpha \frac{T_a - T_f}{h}. \quad (2.116)$$

Az egyenlet megoldása pedig

$$w = \frac{M_T}{I_x E} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2, \quad (2.117)$$

ahol $M_T = EI_x \alpha \frac{T_a - T_f}{h}$. A peremfeltételek

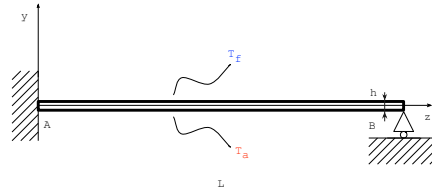
$$w(0) = 0, w'(0) = 0$$

alapján $C_1 = C_2 = 0$. Ezzel a görbült alak egyenlete

$$w = \alpha \frac{T_a - T_f}{2h} z^2. \quad (2.118)$$

15. Feladat

Az L hosszúságú rúd alsó és felső része különböző hőmérsékletű, amelynek eloszlása lineáris.



2.33. ábra. Hőmérséklet változás hatása

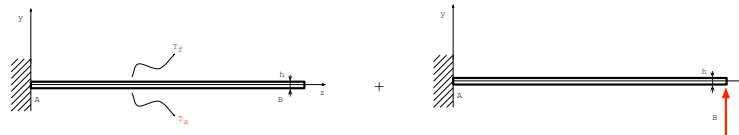
- (a) Mekkora a reakcióerő a B támaszban?
 (b) Mekkora nyomaték ébred a rúdban?

A feladat egyszeresen határozatlan a B támasz miatt. Ennek elvételével a törzstartót kapjuk. Ennek megoldása az előző példában megtalálható, a lehajlás

$$w = \alpha \frac{T_a - T_f}{2h} z^2.$$

Ezzel a B támasz elmozdulása

$$w(L) = \alpha \frac{T_a - T_f}{2h} L^2.$$



2.34. ábra. Törzstartó és egységnyi terhelés

A törzstartó végén működő erő által okozott elmozdulás pedig

$$w = \frac{BL^3}{3I_x E}.$$

A határozatlan tartó B pontja azonban nem mozdulhat el, vagyis

$$w(L) = \alpha \frac{T_a - T_f}{2h} L^2 = \frac{BL^3}{3I_x E} \rightarrow B = \frac{3I_x E \alpha (T_a - T_f)}{2hL} \quad (2.119)$$

A nyomaték a törzstartó és a B erő által okozott igénybevétel összege, tehát

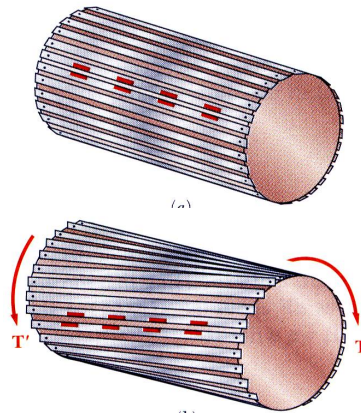
$$M = M_T + M_B = \dots, \quad (2.120)$$

2. HAJLÍTÁS

ahol $M_B = B(L - z)$

3.1. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a csavarás és a nyírás került bemutatásra.



3.1. ábra. Hengeres test csavarása (wiki)

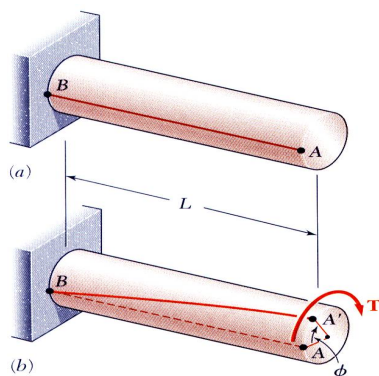
A 3.1 ábrán jól megfigyelhető amint az egyes alkotói a hengernek elcsúsznak egymáshoz képest. Körkeresztmetszetű rudak csavarása esetén a keresztmetszet elfordulása a

$$\phi = \frac{M \cdot L}{I_p G} \quad (3.1)$$

képlet alapján számolható. Mindaddig használható ez az összefüggés amíg a nyomaték és/vagy a keresztmetszet másodrendű nyomatéka állandó. A 3.2

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS

ábrán a csavarónyomaték T hatására létrejövő ϕ elfordulás látható. A kelet-



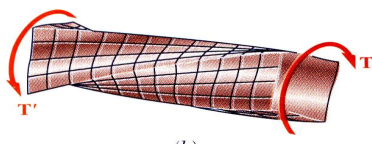
3.2. ábra. Elcsavarodás (wiki)

kező feszültség számítása a

$$\tau = \frac{Me}{I_p} \quad (3.2)$$

képlet alapján lehetséges, ahol e súlyponttól való távolság és I_p a poláris másodrendű nyomaték. Vagyis a feszültség lineárisan változik a sugár mentén.

Nem körkeresztmetszetű rudak csavarása esetén a keresztmetszetek nem maradnak síkok. A 3.3 ábrán egy ilyen eset látható. Ebben az esetben a leg-



3.3. ábra. Téglalap keresztmetszet elcsavarodása (wiki)

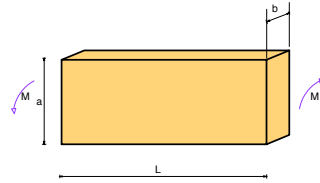
nagyobb feszültség a nagyobb felület súlypontvonalán ébred. Nagysága pedig

$$\tau_{max.} = \frac{M}{c_1 \cdot a \cdot b^2} \quad (3.3)$$

Az elcsavarodás szöge pedig számolható a

$$\phi = \frac{M \cdot L}{c_2 \cdot a \cdot b^3 \cdot G} \quad (3.4)$$

összefüggés alapján. Az együttatók az oldalak arányától a/b függenek. Látható,



3.4. ábra. Téglalap keresztmetszetű tartó csavarása

a/b	c ₁	c ₂
1	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3	0.267	0.263
4	0.282	0.281
5	0.291	0.291
10	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

3.1. táblázat. Együtthatók téglalap keresztmetszet csavarása esetén

hogy $a/b \geq 5$ esetén a c_1, c_2 együtthatók megegyeznek. Ilyen esetekben a következő összefüggés érvényes

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{3} \left(1 - 0.63 \frac{b}{a} \right) \quad (3.5)$$

Ha a falvastagság jóval kisebb a keresztmetszet egyéb méreteinél, akkor a nyíró folyam p jó közelítéssel állandónak tekinthető a falvastagság mentén. A csúsztatófeszültség pedig $\tau = \frac{p}{t}$. Ez a közelítés addig igaz, amíg a falvastagság nem éri el a keresztmetszet legkisebb méretének 20%-át. A kapcsolat a csavarónyomaték M_t és p között levezethető a következő képpen

$$dF = \tau dA = \tau(t ds) = (\tau t) ds = p ds \quad (3.6)$$

$$dM = h dF = h p ds = p (h ds) \quad (3.7)$$

$$dM = p (2dA) \quad (3.8)$$

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS

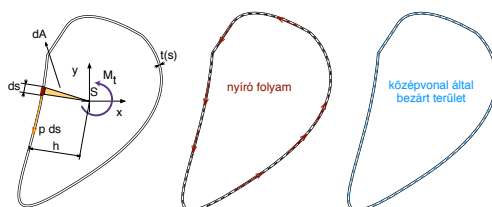
Mivel az egyenlet bal oldalán levő kifejezés dM integrálja a fal keresztmetszete mentén az összes a fal mentén fellépő elemi nyíróerő nyomatékának összegét kifejezi, és mivel ez az összeg a nyomatékkal egyenlő, ezért

$$M_t = \oint dM = \oint p (2dA) \quad (3.9)$$

A nyírófolyam p állandó, így

$$M_t = 2pA \quad (3.10)$$

Ezzel



3.5. ábra. Zárt vékonyfalú szelvény csavarása

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot t \cdot A} \quad (3.11)$$

képlet alapján ahol t a kérdéses pontban a szelvény vastagsága és A a középvonal által határolt terület. Az elcsavarodás szöge pedig számolható a

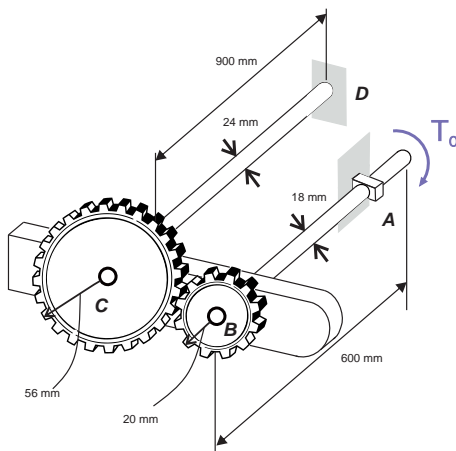
$$\phi = \frac{M}{4 \cdot G \cdot A^2} \oint \frac{ds}{t} \quad (3.12)$$

összefüggés alapján.

1. Feladat

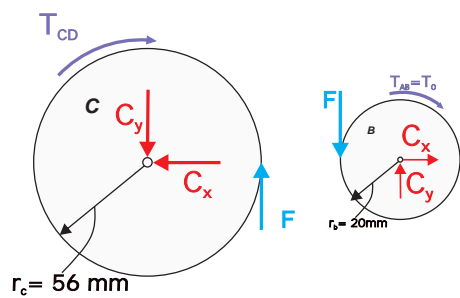
Két acél tengelyt fogaskerekek kapcsolnak össze. Adott $G=80$ MPa és $\tau_{max.}=55$ MPa.

- (a) Határozza meg a legnagyobb csavarónyomaték értékét (T_0)!
- (b) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását (ϕ_A)!



3.6. ábra. Tengelyek elcsavarodása

Megoldás



3.7. ábra. A reakcióerők és nyomatékok

Az ábra alapján a kerek között létrejövő erő és a nyomaték kapcsolata

$$\sum M_B = 0 \rightarrow 0.02F - T_0 = 0 \quad (3.13)$$

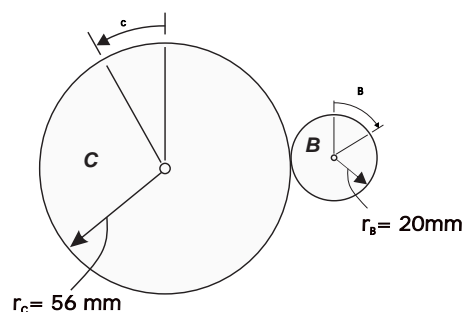
$$\sum M_C = 0 \rightarrow 0.056F - T_{CD} = 0 \quad (3.14)$$

$$T_{CD} = 2.8T_0 \quad (3.15)$$

A megengedett feszültség felhasználásával és $T_{AB} \equiv T_0$

$$\tau_{max.} = \frac{0.009T_0}{I_P} \rightarrow T_0 = 63 \text{ Nm} \quad (3.17)$$

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



Az érintkezési pontban mindkét kerék ugyanannyit fordul el vagyis

$$0.02\phi_B = 0.056\phi_C \rightarrow \phi_B = 2.8\phi_C \quad (3.16)$$

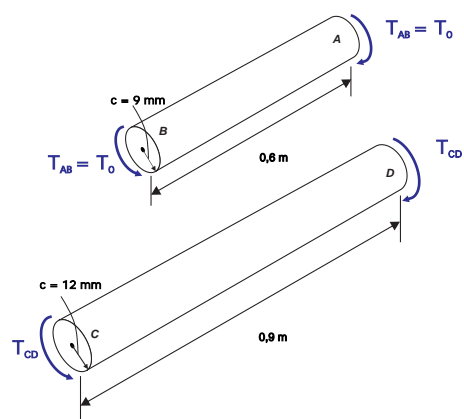
3.8. ábra. Az egyes elfordulások

ahol $I_p = \frac{0.018^4\pi}{32}$. A CD tengely vizsgálata alapján a nyomaték

$$\tau_{max.} = \frac{0.012T_{CD}}{I_p} \rightarrow T_0 = 53.3 \text{ Nm} \quad (3.18)$$

ahol $T_{CD} = 2.8T_0$ és $I_p = \frac{0.024^4\pi}{32}$.

A legnagyobb megengedhető nyomaték tehát 53.3 Nm.



A tengelyek elfordulás pedig

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}L}{I_p G} = \frac{53.3 \cdot 0.6}{80 \text{ GPa} \frac{0.018^4\pi}{32}} = 0.0388 \text{ rad} \quad (3.19)$$

A CD tengely elcsavarodása $T_{CD} = 2.8T_0$ esetén

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L}{I_p G} = \frac{2.8 \cdot 53.3 \cdot 0.9}{80 \text{ GPa} \frac{0.012^4\pi}{32}} = 0.0515 \text{ rad} \quad (3.20)$$

3.9. ábra. Elfordulások

Mivel a CD tengely D vége rögzített, ezért a C keresztmetszet elfordulása egyben $\phi_C = \phi_{CD}$. A B keresztmetszet elcsavarodása azonban

$$\phi_B = 2.8\phi_C = 0.1442 \text{ rad} \quad (3.21)$$

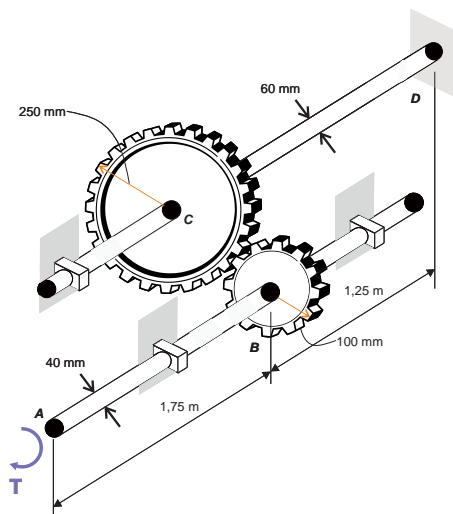
Ezzel az AB rúd A keresztmetszetének elfordulása

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{AB} = 0.183 \text{ rad} \quad (3.22)$$

2. Feladat

Két acél tengelyt fogaskerekek kapcsolnak össze. Adott $G=80 \text{ MPa}$ és $\tau_{max.}=55 \text{ MPa}$.

- Határozza meg a legnagyobb csavarónyomaték értékét (T)!
- Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását (ϕ_A)!



3.10. ábra. Tengely elcsavarodása

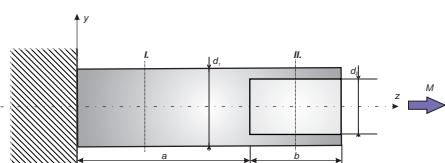
Megoldás

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS

3. Feladat

Egy tengelyt csavarónyomaték $M=3$ kNm terhel. A tömör rész átmérője 60 míg az üreges rész belső átmérője 40 mm, $G=80$ GPa, $a=600$ mm és $b=500$ mm.

- (a) Határozza meg a csúsztatófeszültség értékét mindkét szakaszon!
- (b) Határozza meg a végkeresztmetszet elfordulását (ϕ)!



3.11. ábra. Tengely elcsavarodása

Megoldás

A nyomaték a tartó hossza mentén állandó, ezzel a feszültségek

$$\tau_{\text{I.}} = \frac{M}{I_{p\text{I.}}} \frac{d_1}{2} = 70.7 \text{ MPa} \quad (3.23)$$

$$\tau_{\text{II.}} = \frac{M}{I_{p\text{II.}}} \frac{d_1}{2} = 88.1 \text{ MPa} \quad (3.24)$$

A keresztmetszet elfordulása

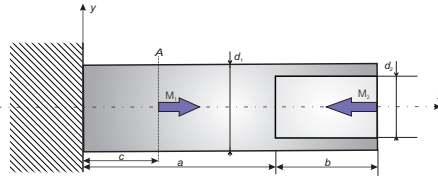
$$\phi = \frac{Ma}{I_{p\text{I.}} G} + \frac{Mb}{I_{p\text{II.}} G} = 36 \text{ mrad} \quad (3.25)$$

4. Feladat

Egy tengelyt csavarónyomatékok M_1, M_2 terhelnek. A geometria az előző példában használttal megegyezik, $c=300$ mm.

- (a) Határozza meg a csúsztatófeszültség értékét mindkét szakaszon!
- (b) Határozza meg a végkeresztmetszet elfordulását (ϕ)!

A befogásban a reakció nyomaték nagysága $M_R = 4$ kNm \leftarrow . Ezzel a tartó hossza mentén változik a nyomaték. A befogás és az A keresztmetszet között 4 kNm, az A-tól a szabad végig pedig -3 kNm. A tömör



3.12. ábra. Tengely elcsavarodása

szakaszon fog megváltozni a feszültség, mert most a korábbi példában levő 3 helyett 4 kNm az igénybevétel. Vagyis

$$\tau_{\text{I.}} = \frac{M_{\text{R}} d_1}{I_{\text{pI.}} 2} = 94.3 \text{ MPa} \quad (3.26)$$

Az üreges szakaszon ugyanakkora feszültség ébred mint az előző példában hiszen ott most is 3 kNm az igénybevétel.

Az elfordulás számításához három részre bontjuk a tartót. A geometria miatt két rész kell ($I_{\text{pI.}}$, $I_{\text{pII.}}$), azonban az egyes szakaszon a nyomaték is változik, mind nagyságban mind irányban. Ezeket figyelembe véve

$$\phi = \frac{M_{\text{R}} c}{I_{\text{pI.}} G} - \frac{3 \text{ kNm}(a - c)}{I_{\text{pI.}} G} - \frac{3 \text{ kNm} b}{I_{\text{pII.}} G} = -15.22 \text{ mrad} \quad (3.27)$$

5. Feladat

Egy tengelyt csavarónyomaték $M=12.5 \text{ kNm}$ terhel. Az AB szakasz anyaga acél ($G_{\text{a}}=77 \text{ GPa}$) a BC szakasz anyaga réz ($G_{\text{r}}=39 \text{ GPa}$). A tengely mindkét vége mereven befogott.

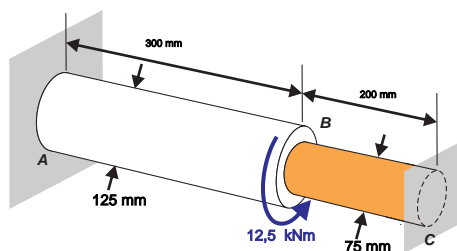
- Határozza meg az A és C támaszokban a nyomatékot!
- Határozza meg a két hengeres részben ébredő feszültséget!

A feszültség az egyes szakaszokban

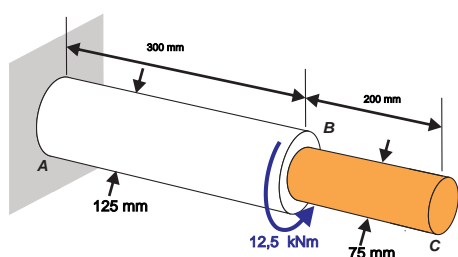
$$\tau_{\text{AB}} = \frac{T_{\text{A}}}{I_{\text{p,AB}}} \frac{125}{2} = 29.7 \text{ MPa} \quad (3.31)$$

$$\tau_{\text{BC}} = \frac{T_{\text{R}}}{I_{\text{p,BC}}} \frac{75}{2} = 13.53 \text{ MPa} \quad (3.32)$$

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



3.13. ábra. Tengely elcsavaródása merev befogások esetén



Megoldás

Mivel a feladat statikailag határozatlan ezért első lépésben határozott feladatot csinálunk belőle a C támasz elvételével. Ezzel az elfordulás M miatt

3.14. ábra. Határozott tartó

$$\phi_M = \frac{M \cdot 0.3}{I_{p,AB} G_a} = 2.03 \text{ mrad} \quad (3.28)$$

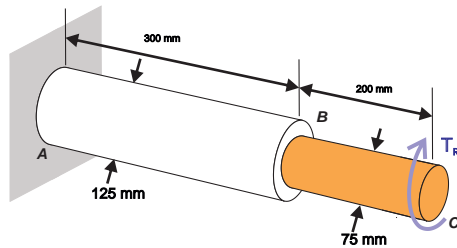
6. Feladat

Egy tengelyt csavarónyomaték $M=120 \text{ Nm}$ terhel. A külső átmérő 20 mm , a furat 16 mm -es.

(a) Határozza meg a befogásokban ébredő nyomatékokat!

Ezzel $T_R=44.5 \text{ Nm}$. Az A befogásban pedig

$$T_A - M + T_R = 0 \rightarrow T_A = 77.5 \text{ Nm} \quad (3.35)$$



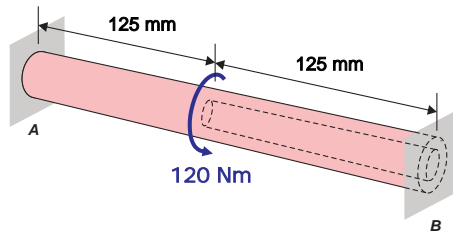
3.15. ábra. A reakciónyomaték alkalmazása

Második lépésben az elvett támasz helyén működtetjük a T_R nyomatékot. Ennek pontosan ugyanakkora elfordulást kell okoznia a rúdon mint a határozott feladat esetén M okozott $\phi_{T_R} \equiv \phi_M$.

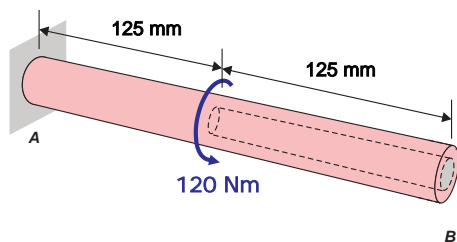
$$0.00203 = \frac{T_R \cdot 0.3}{I_{p,AB} G_a} + \frac{T_R \cdot 0.2}{I_{p,BC} G_r} \quad (3.29)$$

Ezzel $T_R = 1120 \text{ Nm}$. Az A befogásban pedig

$$T_A - M + T_R = 0 \rightarrow T_A = 11.38 \text{ kNm} \quad (3.30)$$



3.16. ábra. Tengely elscsavarodása



3.17. ábra. Határozatlan csavart tartó

Megoldás

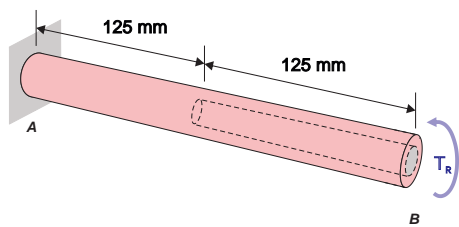
Mivel a feladat statikailag határozatlan ezért első lépésben határozottá tesszük a B támasz elvételével. Ezzel az elfordulás M miatt

$$\phi_M = \frac{M \cdot 0.125}{I_{p,AM} G} \quad (3.33)$$

7. Feladat

Egy tengelyt, melynek átmérője $d_s = 20 \text{ mm}$, hossza 300 mm , csavarónyomaték $T = 500 \text{ Nm}$ terhel. Ehhez a merev lemezen keresztül csatlakozik a $D = 80 \text{ mm}$ külső átmérőjű és t falvastagságú cső, melynek hossza 200 mm .

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



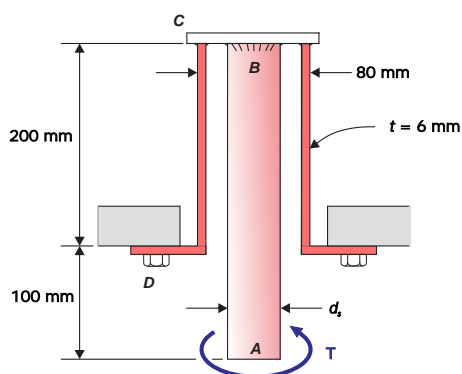
Második lépésben az elvett támasz helyén működtetjük a T_R nyomatékot. Ennek pontosan ugyanakora elfordulást kell okoznia a rúdon mint a határozott feladat esetén M okozott $\phi_{T_R} \equiv \phi_M$.

3.18. ábra. A reakciónyomaték alkalmazása

$$\phi_M = \frac{T_R \cdot 0.125}{I_{p,AM} G} + \frac{T_R \cdot 0.125}{I_{p,MB} G} \quad (3.34)$$

Mindkét elem anyaga azonos $G=80$ GPa.

- Határozza meg a legnagyobb csúsztatófeszültség értékét!
- Határozza meg a végkeresztmetszet elfordulását (ϕ_A)!



3.19. ábra. Tengely elcsavarodása

Megoldás

A tömör tengelyben a feszültség

$$\tau = \frac{T d_s}{I_p 2} = \frac{500000 \cdot 32}{\pi d_s^4} 10 = 318.31 \text{ MPa} \quad (3.36)$$

a gyűrűben pedig

$$\tau = \frac{T D}{I_p 2} = \frac{500000 \cdot 32}{\pi (80^4 - 68^4)} 40 = 10.4 \text{ MPa} \quad (3.37)$$

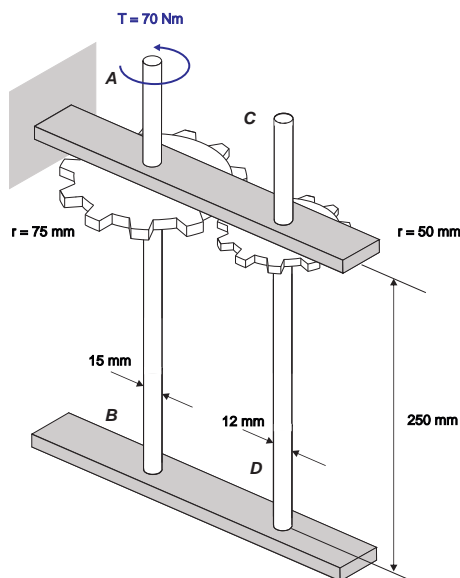
Az A keresztmetszet elfordulása

$$\phi_A = \frac{0.3T}{I_p G} + \frac{0.2T}{I_p G} = \frac{0.3 \cdot 500}{\frac{d_s^4 \pi}{32} G} + \frac{0.2 \cdot 500}{\frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} G} = 0.119 \text{ rad} \quad (3.38)$$

8. Feladat

Egy tengelyt csavarónyomaték M terhel.

- Határozza meg a legnagyobb csúsztatófeszültség értékét!
- Határozza meg a végkeresztmetszet elfordulását (ϕ)!



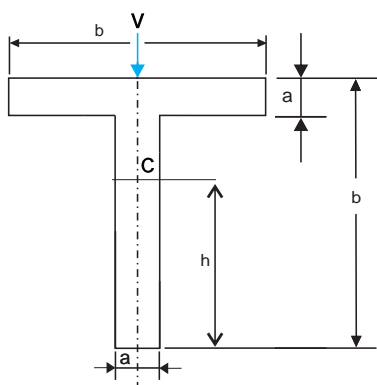
3.20. ábra. Tengely elcsavarodása

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS

9. Feladat

Az adott keresztmetszet igénybevétele nyírás. $V=50$ kN, $a=10$ mm, $b=50$ mm.

(a) Határozza meg a legnagyobb csúsztatófeszültség értékét!



3.21. ábra. Gerenda nyírása

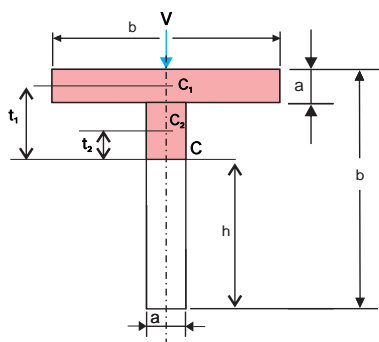
Megoldás

A legnagyobb feszültség a súlypontban ébred, ennek helyzete

$$h = \frac{50 \cdot 10 \cdot 45 + 10 \cdot 40 \cdot 20}{10 \cdot 50 + 10 \cdot 40} = 33.89 \text{ mm}$$

A statikai nyomaték

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot t_1 + A_2 \cdot t_2 = \\ &= 50 \cdot 10 \cdot 11.11 + 10 \cdot 6.11 \cdot \frac{6.11}{2} = \\ &= 5741.66 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$



3.22. ábra. Súlypont és statikai nyomaték

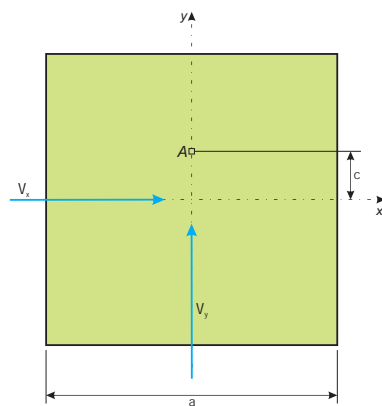
Ezzel a feszültség

$$\tau_{zy} = -\frac{VS_x}{I_x w} = \frac{50000 \cdot 5741.66}{196388.9 \cdot 10} = -146.18 \text{ MPa}$$

10. Feladat

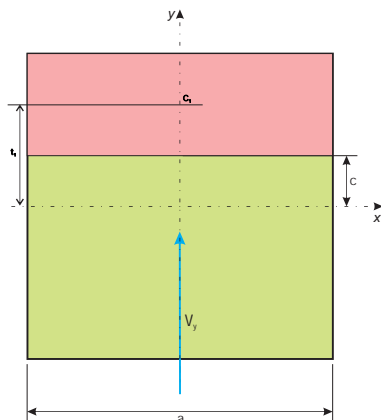
Az adott keresztmetszet igénybevétele nyírás. A mérete $a \times a$ négyzet, $a = 20 \text{ mm}$, $c = 5 \text{ mm}$, $V_x = 10000 \text{ N}$, $V_y = 20000 \text{ N}$.

(a) Határozza meg a csúsztatófeszültségek értékét az A pontban!



3.23. ábra. Gerenda nyírása

Megoldás



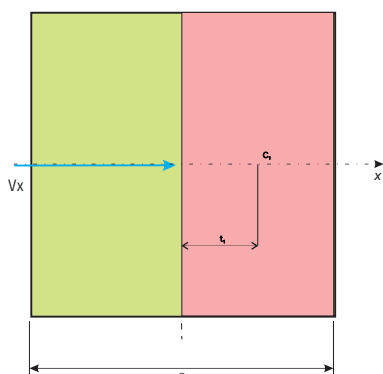
A statikai nyomaték és a feszültség a függőleges erő esetén

$$S_x = 5 \cdot 20 \cdot 7.5 = 750 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{zy} = \frac{20000 \cdot 750}{13333.33 \cdot 20} = 56.25 \text{ MPa}$$

3.24. ábra. Függőleges nyíróerő

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



A statikai nyomaték és a feszültség a vízszintes erő esetén

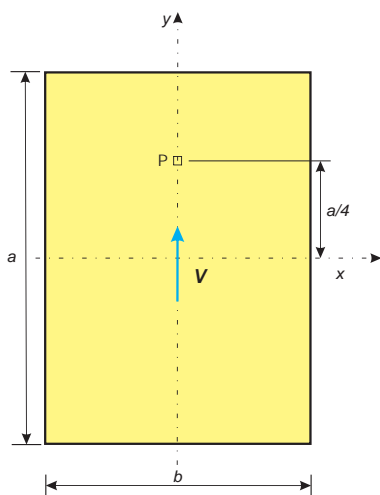
$$S_y = 20 \cdot 10 \cdot 5 = 1000 \text{ mm}^3$$
$$\tau_{zx} = \frac{10000 \cdot 1000}{13333.33 \cdot 20} = 37.5 \text{ MPa}$$

3.25. ábra. Vízszintes nyíróerő

11. Feladat

Az adott keresztmetszet igénybevétele nyírás ($V=40 \text{ kN}$, $a=50 \text{ mm}$, $b=10 \text{ mm}$).

(a) Határozza meg a csúsztatófeszültség értékét a kijelölt P pontban és a súlypontban!



3.26. ábra. Gerenda nyírása

Megoldás

Hasonlóan az előző példához a statikai nyomaték a súlypont és a P pont

esetén

$$S_x = b \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} = 3125 \text{ mm}^3 \quad (3.39)$$

$$S_x = b \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{8} = 2343.75 \text{ mm}^3 \quad (3.40)$$

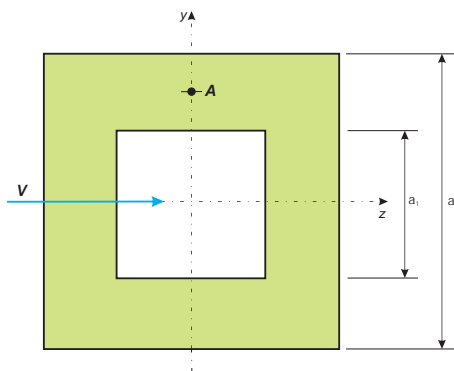
$$\tau_{zy} = \frac{40000 \cdot 3125}{I_x \cdot b} = 120 \text{ MPa} \quad (3.41)$$

$$\tau_{zy} = \frac{40000 \cdot 2343.75}{I_x \cdot b} = 90 \text{ MPa} \quad (3.42)$$

12. Feladat

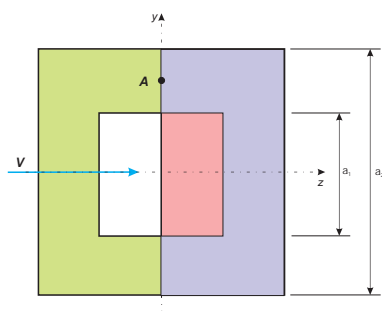
Az adott keresztmetszet igénybevétele nyírás.

- (a) Határozza meg a csúsztatófeszültséget a kijelölt A pontban! $a_1=20$ mm, $a_2=30$ mm, $V=10000$ N.



3.27. ábra. Gerenda nyírása

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



3.28. ábra. Statikai nyomaték számítása

Megoldás

A statikai nyomaték számításához a nagyobb (lila) 30×15 -ös téglalagra és a kisebb (lazac) 20×10 -es téglalagra bontva a keresztmetszetet

$$S_y = 30 \cdot 15 \cdot 7.5 - 10 \cdot 20 \cdot 5 = 2375 \text{ mm}^3$$

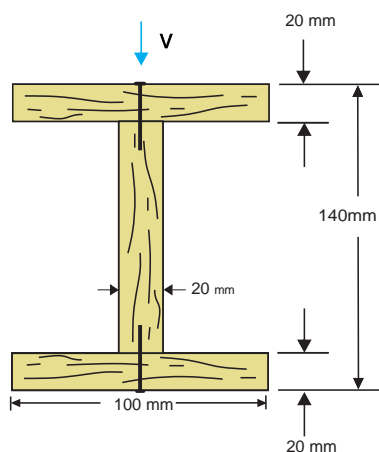
A feszültség pedig

$$\tau_{zx} = \frac{10000 \cdot 2375}{I_y \cdot 10} = 43.85 \text{ MPa} \quad (3.43)$$

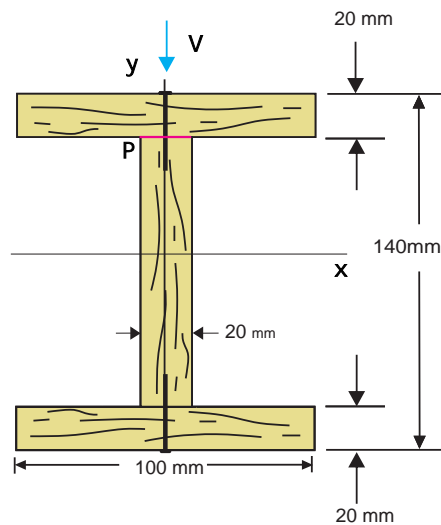
13. Feladat

A tartó igénybevétele nyírás ($V=500 \text{ N}$). A három gerenda szögekkel van összefogatva. Hosszirányban $t=25 \text{ mm}$ -enként van összefogatva a három elem.

- Határozza meg a csúsztatófeszültség értékét az összefogás helyén!
- Határozza meg a nyíróerő értékét ami a szögeket terheli!



3.29. ábra. Gerenda nyírása

**Megoldás**

A nagyobb feszültség a 20 mm széles, álló gerenda P-vel jelölt helyén ébred. Itt a statikai nyomaték és a feszültség nagysága

$$S_x = 100 \cdot 20 \cdot 60 = 120000 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{zy} = -\frac{500 \cdot 120000}{I_x \cdot 20} = 0.185 \text{ MPa}$$

3.30. ábra. A feszültség számítása a P helyen

A szegeket terhelő erő pedig

$$F = \tau_{zy} \cdot A = 0.185 \cdot t \cdot 20 = 92.5 \text{ N} \quad (3.44)$$

14. Feladat

A tartó igénybevétele nyírás ($V=5000 \text{ N}$), mely függőleges irányú. A négy gerenda szögekkel van összefogatva. Hosszirányban $t=40 \text{ mm}$ -enként van összefogatva.

(a) Határozza meg a csúsztatófeszültség értékét az összefogás helyén!

(b) Határozza meg a nyíróerő értékét ami a szögeket terheli!

Megoldás

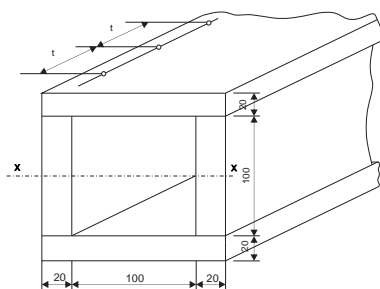
A másodrendű nyomaték számítása

$$I_x = \frac{140^4 - 100^4}{12} = 23.68 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \quad (3.45)$$

A statikai nyomaték az összefogás helyén

$$S_x = 140 \cdot 20 \cdot 60 = 168000 \text{ mm}^3 \quad (3.46)$$

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



3.31. ábra. Gerenda nyírása

Ezzel a csúsztatófeszültség nagysága

$$\tau_{yz} = \frac{5000 \cdot 168000}{23.68 \cdot 10^6 \cdot 40} = 0.88 \text{ MPa} \quad (3.47)$$

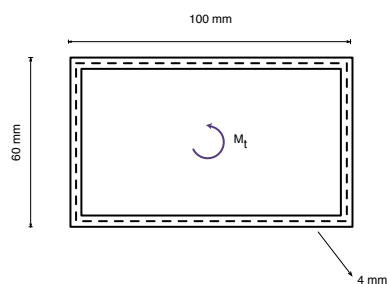
Két szög között a felület ami felveszi a feszültséget és ezzel a nyíróerő

$$A = 20 \cdot 40, \quad F = \tau \cdot A = 704 \text{ N} \quad (3.48)$$

15. Feladat

Egy téglalap keresztmetszetű alumínium szelvényt csavarónyomaték terhel. A falvastagság végig állandó. $M_t = 3 \text{ kNm}$, $t = 4 \text{ mm}$.

(a) Határozza meg a csúsztatófeszültség nagyságát!



3.32. ábra. Zárt vékonyfalú szelvény csavarása

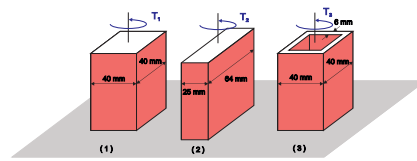
Megoldás

A középvonal által határolt terület $A = 96 \cdot 56 = 5376 \text{ mm}^2$. A feszültség pedig $\tau = \frac{M_t}{2tA} = 69.8 \text{ MPa}$.

16. Feladat

Az adott oszlopokat csavarónyomaték terheli. $\tau_{meg.}=40$ MPa.

- (a) Határozza meg az egyes esetekben a legnagyobb megengedhető csavarónyomaték nagyságát!



Megoldás

Az első esetben az oldalarány 1, ehhez az együttható a 3.1 táblázatból $c_1 = 0.208$. Ezzel $M = \tau_{meg.} \cdot c_1 \cdot ab^2 = 532$ Nm.

A téglalap keresztmetszet esetén az oldalarány $\frac{a}{b} = 2.56$. Interpolálva a c_1 együtthatót kapjuk $c_1 = 0.259$. Ezzel $M = \tau_{meg.} \cdot c_1 \cdot ab^2 = 414$ Nm. Az utolsó, négyzetes csőkeresztmetszet esetén a legnagyobb nyomaték $M = \tau_{meg.} \cdot 2 \cdot A \cdot t = 555$ Nm, ahol $A = 34^2$ mm², $t = 6$ mm.

17. Feladat

Az adott szelvényt V_x, V_y nyírőerő terheli a nyírási középponton, H-n keresztül. A keresztmetszet adatai mm-ben adóttak. A falvastagság állandó, $t=2.5$ mm. $V_x=2400$ N, $V_y=1800$ N.

- (a) Határozza meg a csúsztatófeszültség eloszlását!

A súlypont meghatározása az y_0 tengelyhez képest

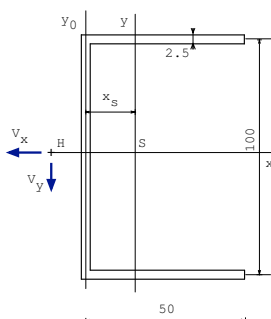
$$x_s = \frac{2 \cdot 2.5 \cdot 50 \cdot 25}{2 \cdot 50 \cdot 2.5 + 100 \cdot 2.5} = 12.5 \text{ mm} \quad (3.49)$$

A másodrendű nyomatékok kiszámítása az x, y tengelyekre

$$I_x = 2 \frac{2.5^3 \cdot 50}{12} + 2.5 \cdot 50 \cdot 50^2 + \frac{2.5 \cdot 100^3}{12} = 521000 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 2 \frac{2.5 \cdot 50^3}{12} + 2.5 \cdot 50 \cdot 12.5^2 + \frac{2.5^3 \cdot 100}{12} + 100 \cdot 2.5 \cdot 12.5^2 = 0.11 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



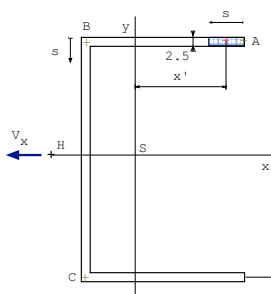
3.33. ábra. Nyíltszelvény nyírása

- τ_{zx} eloszlása V_x miatt

Az első, AB szakaszon a csúsztatófeszültség eloszlása

$$\tau_{zx}^{AB} = \frac{q}{t} = \frac{\frac{V_x}{I_y} (2.5s) \left(37.5 - \frac{s}{2}\right)}{2.5} = -0.01083s^2 + 0.8122s \quad (3.50)$$

ahol $A = (2.5s)$ az s hosszú elem területe, $x' = \left(37.5 - \frac{s}{2}\right)$ az s hosszú elem súlypontjának a távolsága az y tengelytől.

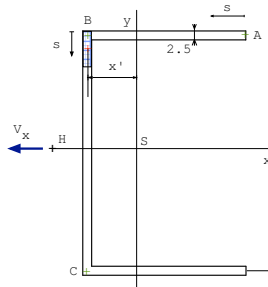


3.34. ábra. Vázlat a feszültség számításához

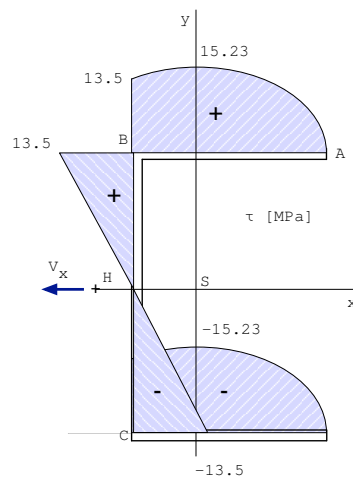
Vagyis ezen a szakaszon parabolikus az eloszlása a csúsztató feszültségnek.

A második, BC szakaszon a csúsztatófeszültség eloszlása

$$\tau_{xz}^{BC} = \tau_{zx}^B + \frac{\frac{V_x}{I_y} 2.5s (-12.5)}{2.5} = -0.271s + 13.5 \quad (3.51)$$



3.35. ábra. Vázlat a feszültség számításhoz



3.36. ábra. A feszültség eloszlása V_x hatására

Ezen a szakaszon pedig lineáris az eloszlás.

A feszültség a teljes keresztmetszetben az alábbi ábrán látható.

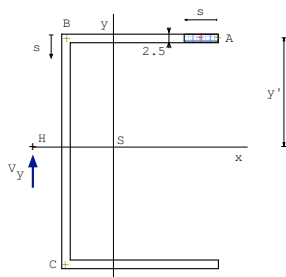
A felső és alsó vízszintes részein a keresztmetszetnek a széleken nincs feszültség, a legnagyobb értéket a súlypontban éri el. A függőleges BC szakaszon pedig V_x hatásvonalában nincs feszültség.

- τ_{zy} eloszlása V_y miatt

Az első, AB szakaszon a csúszatófeszültség eloszlása

$$\tau_{zy}^{AB} = \frac{q}{t} = \frac{\frac{V_y}{I_x} (2.5s) 50}{2.5} = \frac{25}{1172} s \quad (3.52)$$

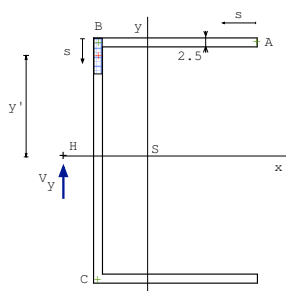
3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



3.37. ábra. Vázlat a feszültség számításához

A második, BC szakaszon a csúsztatófeszültség eloszlása

$$\tau_{yz}^{BC} = \tau_{zy}^B + \frac{V_y}{I_x} \frac{2.5s \left(50 - \frac{s}{2}\right)}{2.5} = \frac{625}{586} + \frac{25s}{1172} - \frac{s^2}{4688} \quad (3.53)$$



3.38. ábra. Vázlat a feszültség számításához

A feszültség a teljes keresztmetszetben az alábbi ábrán látható.

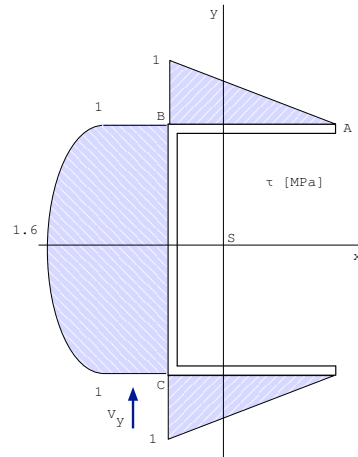
A végleges feszültség eloszlás a két eloszlás összegéből tevődik össze.

18. Feladat

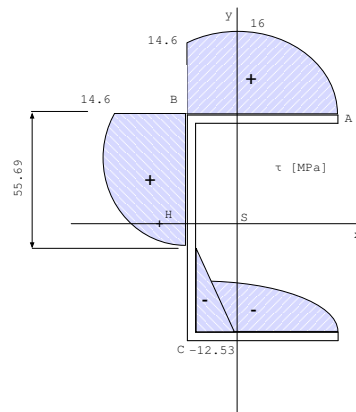
Az alábbi csanakúpot M csavarónyomaték terheli. Az alapkör sugara R, az L magasságban levő keresztmetszet sugara r.

(a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását!

Megoldás



3.39. ábra. A feszültség eloszlása V_y hatására



3.40. ábra. A feszültség eloszlása V_x, V_y hatására

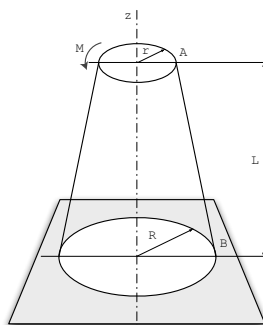
Az elfordulás számításához szükséges a másodrendű nyomaték felírása, mint a hossz függvénye,

$$r(z) = R - z\left(\frac{R}{z} - \frac{r}{L}\right).$$

A keresztmetszet elfordulása pedig

$$\varphi = \int_0^L \frac{M}{I_p(z)G} dz = \frac{2LM(r^2 + rR + R^2)}{3G\pi r^3 R^3}.$$

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS

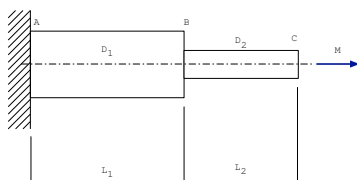


3.41. ábra. Változó keresztmetszetű tartó csavarása

19. Feladat

Az adott változó keresztmetszetű rudat az M csavarónyomaték terheli. Adott $\tau_{meg.} = 40 \text{ MPa}$, $\varphi_{Cmax.} = 1 \text{ deg}$, $D_1 = 56 \text{ mm}$, $D_2 = 48 \text{ mm}$, $L_1 = 1.45 \text{ m}$, $L_2 = 1.2 \text{ m}$, $G = 80 \text{ GPa}$.

(a) Határozza meg a csavarónyomaték maximális értékét, adott $\tau_{meg.}$, $\varphi_{Cmax.}$ mellett!



3.42. ábra. Változó keresztmetszetű tartó csavarása

Megoldás

A megengedett feszültség alapján M értéke

$$\tau = \frac{16M}{D_2^3 \pi} \rightarrow M = 276480\pi \text{ Nmm.}$$

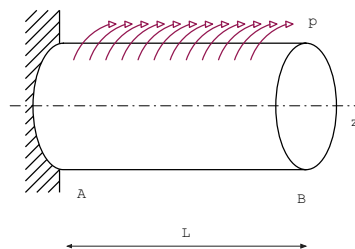
A megengedett elfordulás alapján M értéke

$$\varphi_{Cmax.} = \frac{M}{G} \left(\frac{32L_1}{D_1^4 \pi} + \frac{32L_2}{D_2^4 \pi} \right) \rightarrow M = .$$

20. Feladat

Az adott állandó keresztmetszetű (átmérő d) rudat az állandó p intenzitású ($[p] = \frac{Nm}{m}$) megoszló csavarónyomaték terheli a teljes hosszon.

- (a) Határozza meg a csúsztatófeszültség legnagyobb értékét!
 (b) Határozza meg a végkeresztmetszet B elfordulását!



3.43. ábra. Állandó intenzitású megoszló nyomaték

Megoldás

A legnagyobb nyomaték a rúd végén ébred, értéke

$$M = pL.$$

Ezzel a legnagyobb feszültség

$$\tau = \frac{16M}{d^3\pi} = \frac{16pL}{d^3\pi}.$$

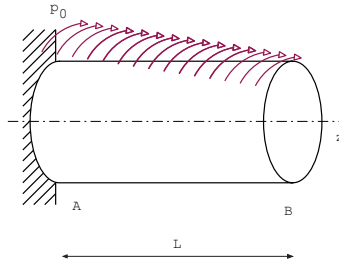
Az elcsavarodás pedig

$$\varphi = \int_0^L \frac{M(z)}{I_p G} dz = \int_0^L \frac{pz}{I_p G} dz = \frac{16pL^2}{d^4\pi G}.$$

21. Feladat

Az adott állandó keresztmetszetű (átmérő d) rudat a lineárisan változó intenzitású ($[p_0] = \frac{Nm}{m}$) megoszló csavarónyomaték terheli a teljes hosszon. Ennek értéke a befogási keresztmetszetben p_0 , a szabad végen nulla.

3. CSAVARÁS, NYÍRÁS



3.44. ábra. Lineárisan változó intenzitású megoszló nyomaték

- (a) Határozza meg a csúsztatófeszültség legnagyobb értékét!
- (b) Határozza meg a végkeresztmetszet B elfordulását!

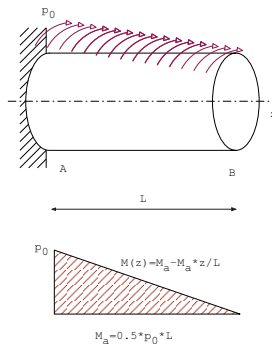
Megoldás

A legnagyobb nyomaték értéke

$$M = \frac{1}{2} p_0 L.$$

Ezzel a legnagyobb feszültség

$$\tau = \frac{16M}{d^3 \pi} = \frac{8p_0 L}{d^3 \pi}.$$



3.45. ábra. Vázlat a megoldáshoz

Az elcsavarodás pedig

$$\varphi = \int_0^L \frac{M(z)}{I_p G} dz = \int_0^L \frac{pz}{I_p G} dz = \frac{16pL^2}{3d^4 \pi G},$$

ahol $M(z) = M_a\left(1 - \frac{z}{L}\right)$

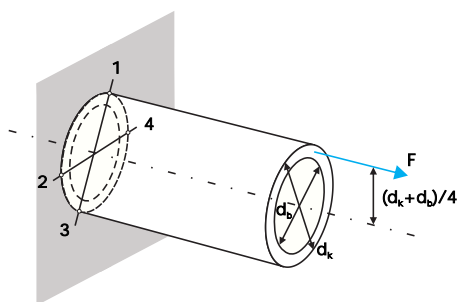
3. CSAVARÁS, NYÍRÁS

ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

1. Feladat

Az alábbi csövet koncentrált erő terhel ($F=200$ kN, $d_k = 205$ mm, $d_b = 195$ mm).

(a) Határozza meg a feszültséget a kijelölt négy pontban!



4.1. ábra. Összetett igénybevétel

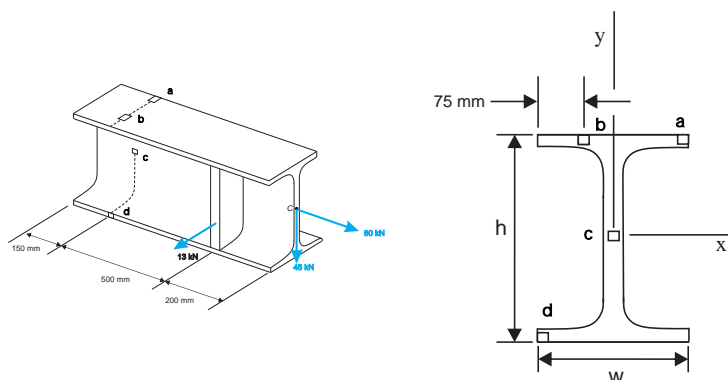
Megoldás

2. Feladat

Az alábbi szabványos W250x49.1 elemet koncentrált erők terhelnek. A tartó bal vége mereven befogott.

(a) Határozza meg a feszültséget a kijelölt négy pontban a, b, c és d!

4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL



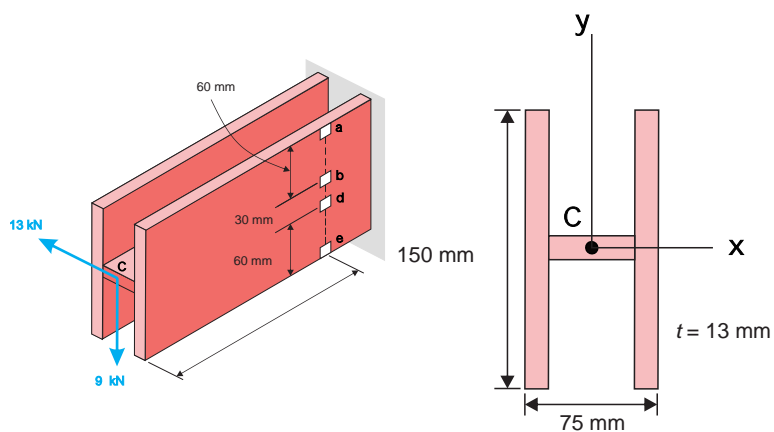
4.2. ábra. Összetett igénybevétel

Megoldás

3. Feladat

Az alábbi szabványos elemet koncentrált erők terhelnek.

(a) Határozza meg a feszültséget a kijelölt négy pontban a, b, d és e!



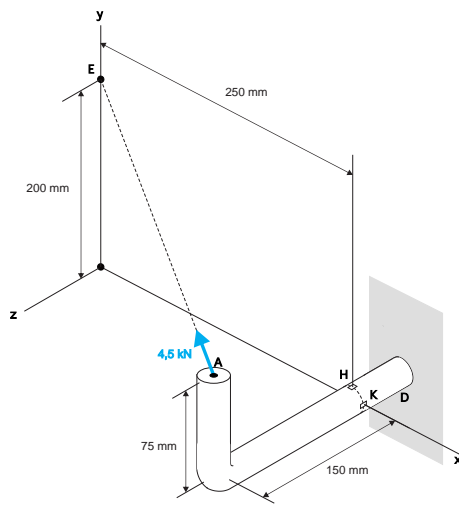
4.3. ábra. Összetett igénybevétel

Megoldás

4. Feladat

Az alábbi kör keresztmetszetű tartót ($d=45$ mm) koncentrált erő terhel.

(a) Határozza meg a feszültség értékét a H és K pontokban!

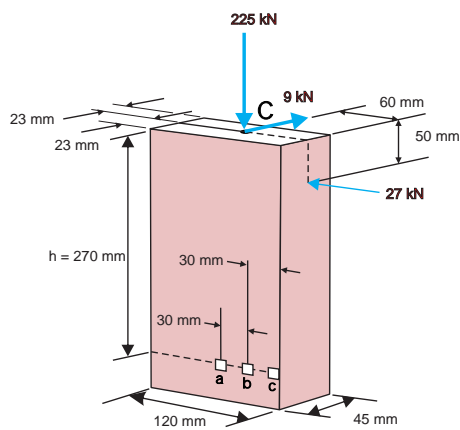


4.4. ábra. Összetett igénybevétel

5. Feladat

Az alábbi oszlopot koncentrált erők terhelnek.

(a) Határozza meg az A, B és C pontokban a feszültséget!



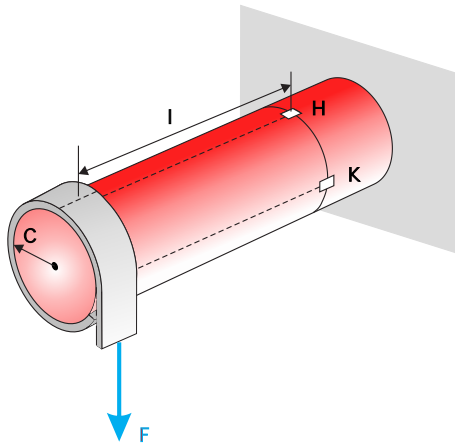
4.5. ábra. Összetett igénybevétel

4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

6. Feladat

Egy tengelyt koncentrált erő terhel ($F= 5 \text{ kN}$, $c= 20 \text{ mm}$, $l=100 \text{ mm}$).

(a) Határozza meg a H és K pontokban a feszültségeket!



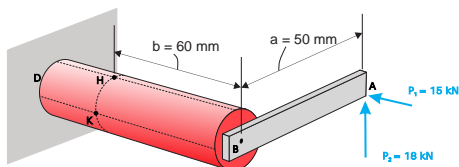
4.6. ábra. Tengely terhelése

Megoldás

7. Feladat

Egy tengelyt erők terhelnek.

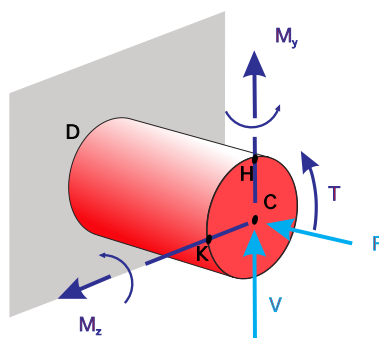
(a) Határozza meg a feszültségek értékét a H és K pontokban!



4.7. ábra. Tengely terhelése

Megoldás

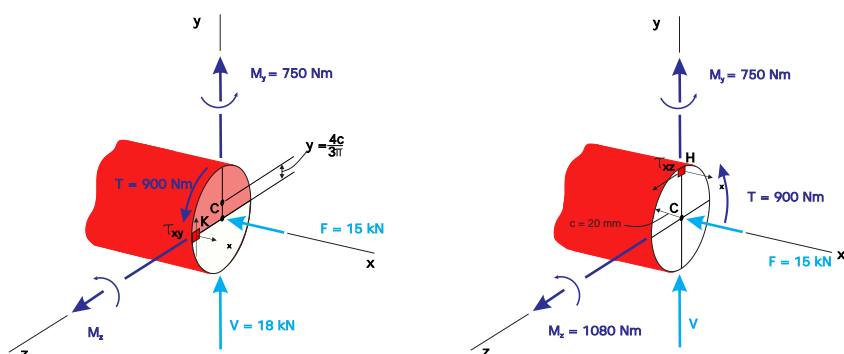
A keresztmetszet igénybevételei



4.8. ábra. Igénybevételek

A két pontban a feszültségek

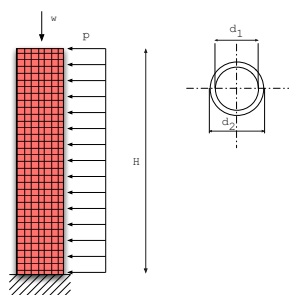
4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL



8. Feladat

Az alábbi H magasságú oszlopot, melynek külső-belső átmérője d_2, d_1 , az önsúlyán ($[w]=N/m$) kívül a p ($[p] = N/m^2$) intenzitású szél terheli.

- (a) Legfeljebb milyen H magassága lehet az oszlopnak, hogy a normálfeszültség nulla legyen?



4.9. ábra. Oszlop összetett igénybevétele

Megoldás

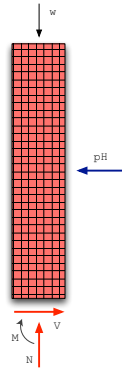
A befogási keresztmetszetben a normálfeszültség számolható

$$\sigma = -\frac{N}{A} + \frac{M d_2}{I} \quad (4.1)$$

ahol $N = wH$, $A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2)$, $M = qH \frac{H}{2} = \frac{1}{2} p d_2 H^2$

A feltétel alapján

$$\frac{N}{A} = \frac{M d_2}{2I} \rightarrow H = \frac{w (d_2^2 + d_1^2)}{4p d_2^2} \quad (4.2)$$

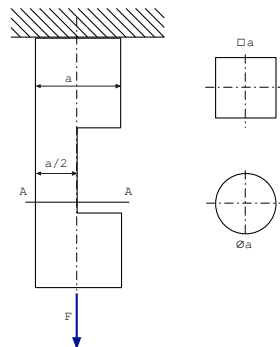


4.10. ábra. Igénybevételek

9. Feladat

Az alábbi rudat a végkeresztmetszet súlypontjában egy koncentrált erő terheli. A rúd közepén a keresztmetszet felét eltávolították, így az egyik esetben téglalap, míg a másik esetben egy félkör marad.

- (a) Ha a végkeresztmetszetek négyzetek "a" élhosszal, mekkora az N-N keresztmetszetben a normálfeszültség?
- (b) Ha a végkeresztmetszetek körök "a" átmérővel, mekkora az N-N keresztmetszetben a normálfeszültség?



4.11. ábra. Változó keresztmetszetű rúd

Megoldás

4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

Négyzet keresztmetszet esetén a szükséges mennyiségek

$$A = a \frac{a}{2}, I = \frac{1}{12} a \left(\frac{a}{2} \right)^3, M = \frac{Fa}{4}, e = \frac{a}{4}.$$

Így a feszültségek

$$\sigma_n = \frac{F}{A} - \frac{Me}{I} = -\frac{4F}{a^2} \quad (4.3)$$

$$\sigma_h = \frac{F}{A} + \frac{Me}{I} = \frac{8F}{a^2} \quad (4.4)$$

Kör keresztmetszet esetén a szükséges mennyiségek

$$A = \frac{a^2 \pi}{8}, I = 0.1098 \left(\frac{a}{2} \right)^4, M = F \frac{2a}{3\pi}.$$

Így a feszültségek

$$\sigma_n = \frac{F}{A} - \frac{Me_n}{I} = -6.36 \frac{F}{a^2} \quad (4.5)$$

$$\sigma_h = \frac{F}{A} + \frac{Me_h}{I} = 9.11 \frac{F}{a^2} \quad (4.6)$$

ahol $e_h = \frac{2a}{3\pi}$, $e_n = \frac{a}{2} - e_h = 0.2878a$.

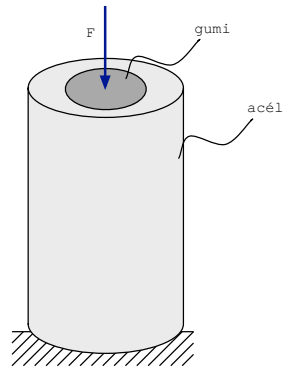
10. Feladat

Az alábbi gumi alkatrészt egy teljesen merevnek tekinthető acél perselybe helyezték. Koncentrált erő terheli a gumit egy merevnek tekinthető lemezen keresztül. A gumi hossza L , keresztmetszete A .

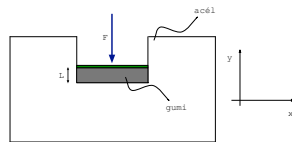
(a) Mekkora nyomás ébred a gumi oldalfalán?

(b) Mennyivel rövidül meg a gumi?

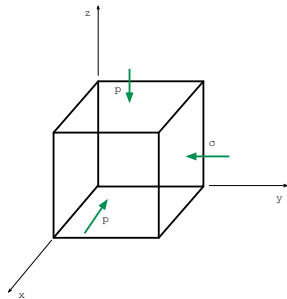
A koncentrált erő miatt $\sigma = \frac{F}{A}$ feszültség ébred, valamint az oldalfalakon p nyomás. A fajlagos hosszváltozás az x és z irányban nulla a merev acél persely miatt $\varepsilon_x = \varepsilon_z = 0$.



4.12. ábra. Gátolt alakváltozás



4.13. ábra. A szerkezet keresztmetszeti nézetben



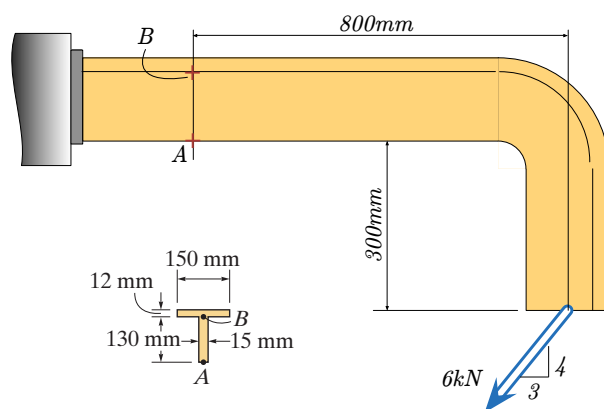
4.14. ábra. Feszültségállapot

11. Feladat

Az alábbi tartót egy koncentrált erő terheli. A keresztmetszet az ábrán látható.

- Mekkora a normál és csúszatófeszültség a jelölt keresztmetszet B pontjában?
- Mekkorák a főfeszültségek ebben a pontban?

4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL



4.15. ábra. Összetett igénybevétel.

Megoldás

$$\sigma = 20.834 \text{ MPa}, \quad (4.7)$$

$$\tau = -2.84 \text{ MPa}, \quad (4.8)$$

$$\sigma_1 = 21.2 \text{ MPa}, \quad (4.9)$$

$$\sigma_2 = 0, \quad (4.10)$$

$$\sigma_3 = -0.38 \text{ MPa}. \quad (4.11)$$

12. Feladat

Az alábbi tartó terhelése koncentrált erő és nyomatékok. A keresztmetszet az ábrán látható $d=25$ mm-es kör alakú.

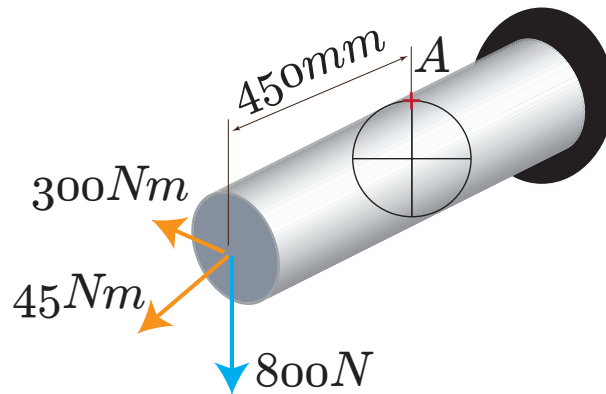
(a) Mekkora a főfeszültségek a jelölt keresztmetszet A pontjában?

Megoldás

$$\sigma_1 = 5.5 \text{ MPa}, \quad (4.12)$$

$$\sigma_2 = 0, \quad (4.13)$$

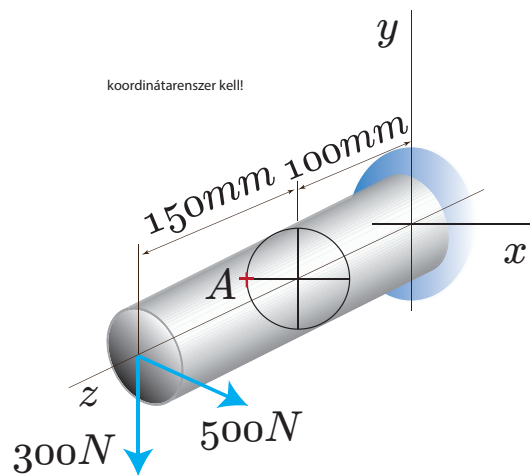
$$\sigma_3 = -0.611 \text{ MPa}. \quad (4.14)$$



4.16. ábra. Összetett igénybevétel.

13. Feladat

Az alábbi tartó terhelése koncentrált erők-ből áll. A keresztmetszet az ábrán látható $d=40$ mm-es kör alakú.



4.17. ábra. Összetett igénybevétel.

(a) Határozza meg a jelölt keresztmetszet A pontjában a feszültségállapotot!

Megoldás

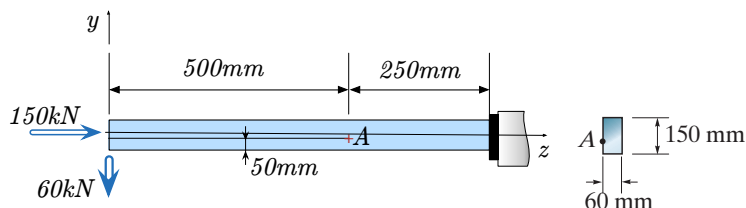
$$\sigma_z = 11,9 \text{ MPa}, \quad (4.15)$$

$$\tau_{yz} = -0,318 \text{ MPa}. \quad (4.16)$$

4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

14. Feladat

Az alábbi tartó terhelése koncentrált erők**ből** áll. A vízszintes erő hatásvonalala a súlyponton átmegy! A keresztmetszet az ábrán látható.



4.18. ábra. Összetett igénybevétel.

(a) Határozza meg a jelölt keresztmetszet A pontjában a főfeszültségeket!

Megoldás

$$\sigma_1 = 1.27 \text{ MPa}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_2 = -0 \text{ MPa}, \quad (4.18)$$

$$\sigma_3 = -62.4 \text{ MPa}. \quad (4.19)$$

15. Feladat

A két végén csapágyazott tengelyen két fogszerék van rögzítve. A terhelés F_x, F_y koncentrált erők. Adott $F_x = 3 \text{ kN}, F_y = 2 \text{ kN}, \sigma_{meg.} = 80 \text{ MPa}$.

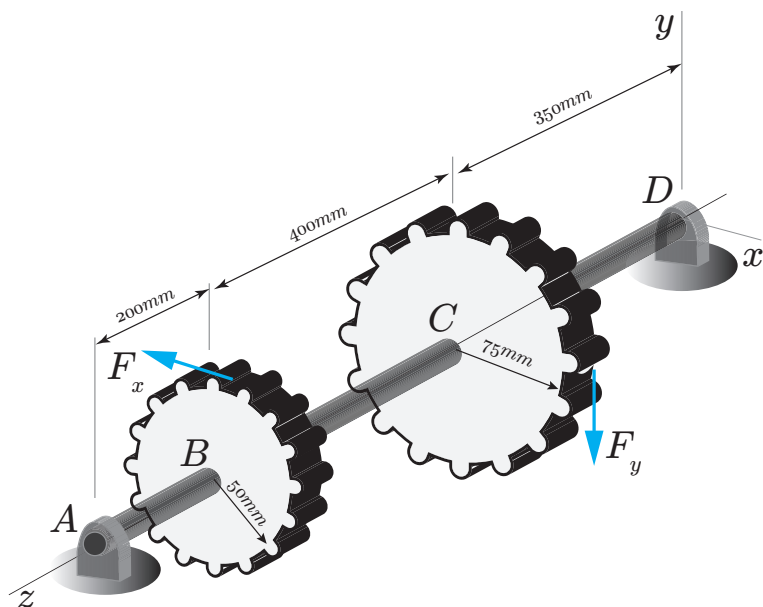
(a) Határozza meg a tengely legkisebb átmérőjét a Mohr elmélet alapján!

Megoldás

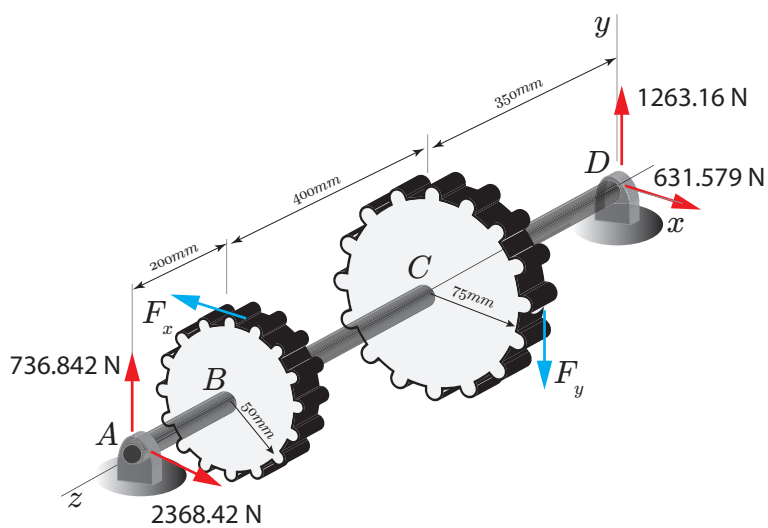
A reakció erőrendszer látható a ?? ábrán. A veszélyes keresztmetszet a B keresztmetszet. Itt hajlításból $M_x = 147.4 \text{ Nm}, M_y = 473.7 \text{ Nm}$ ébred.

Csavarás ugyanitt $M_t = 150 \text{ Nm}$. Ezzel az eredő hajlítás $M_h = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 496.1 \text{ Nm}$.

Az igénybevételi ábrák pedig



4.19. ábra. Tengely összetett igénybevétele.



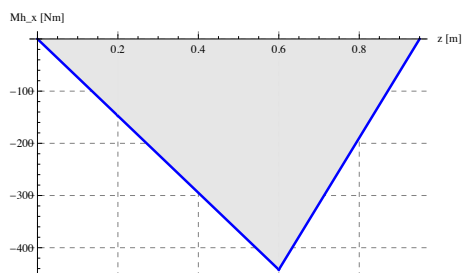
4.20. ábra. A reakciók.

Az egyenértékű feszültség legfeljebb 80 MPa lehet. Ezzel

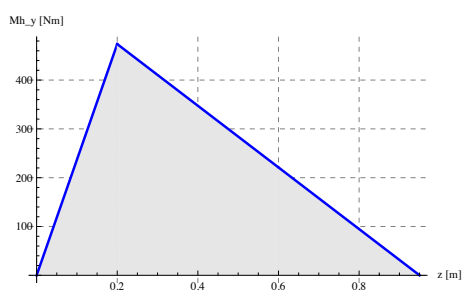
$$\sigma_{red.} = \sigma_{meg.} = \sqrt{\left(\frac{M_h d}{I} \frac{d}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t d}{2I} \frac{d}{2}\right)^2} \rightarrow d. \quad (4.20)$$

Vagyis $d=40.41$ mm.

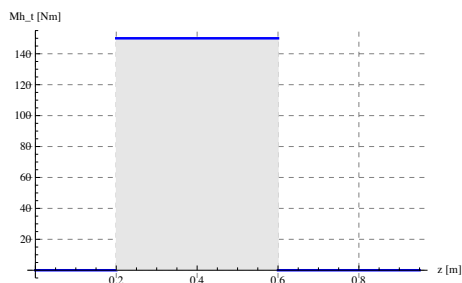
4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL



4.21. ábra. A hajlítónyomaték az x tengely körül.



4.22. ábra. A hajlítónyomaték az y tengely körül.



4.23. ábra. A csavarónyomaték a z tengely körül.

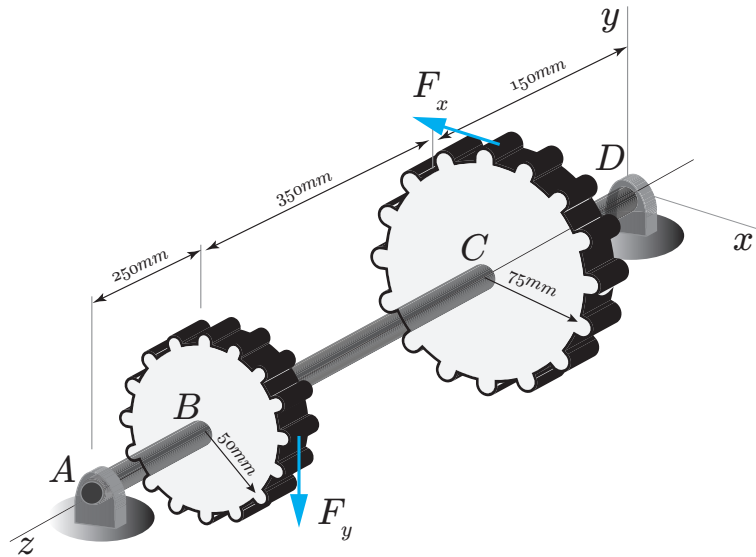
16. Feladat

A két végén csapágyazott tengelyen két fogskerék van rögzítve. A terhelés F_x, F_y koncentrált erők. Adott $F_x = 5$ kN, $F_y = 7.5$ kN, $\sigma_{meg.} = 100$ MPa.

(a) Határozza meg a tengely legkisebb átmérőjét a Mohr elmélet alapján!

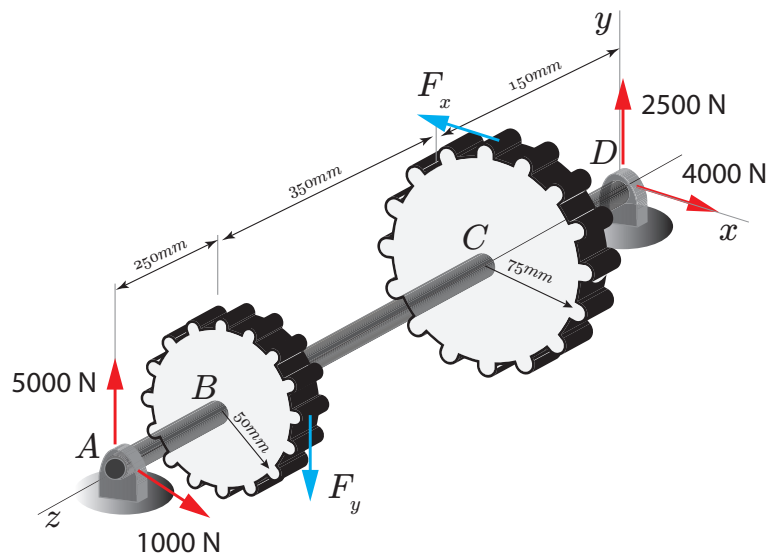
Az igénybevételi ábrák pedig

Megoldás



4.24. ábra. Tengely összetett igénybevétele.

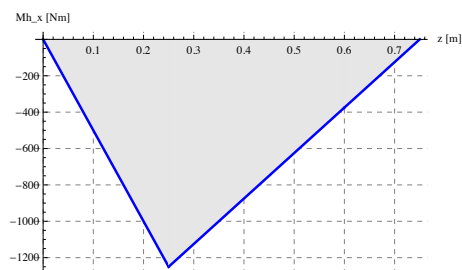
A reakció erőrendszer látható a ?? ábrán. A veszélyes keresztmetszet a B keresztmetszet. Itt hajlításból $M_x = 1250 \text{ Nm}$, $M_y = 250 \text{ Nm}$ ébred. Csavarás ugyanitt $M_t = 375 \text{ Nm}$. Ezzel az eredő hajlítás $M_h = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 1274.75 \text{ Nm}$.



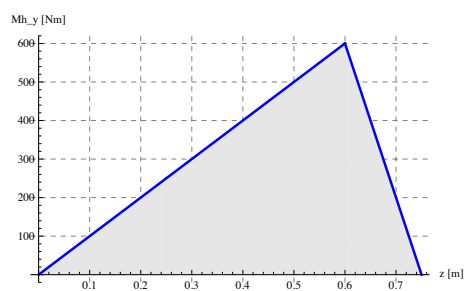
4.25. ábra. A reakciók.

4. ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTEL

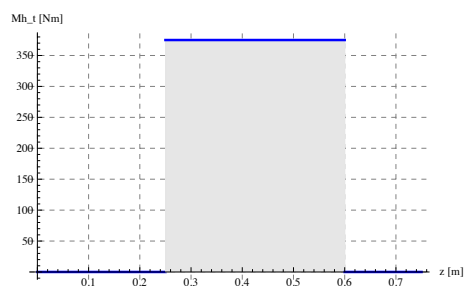
Az igénybevételi ábrák pedig



4.26. ábra. A hajlítónyomaték az x tengely körül.



4.27. ábra. A hajlítónyomaték az y tengely körül.



4.28. ábra. A csavarónyomaték a z tengely körül.

Az egyenértékű feszültség legfeljebb 100 MPa lehet. Ezzel

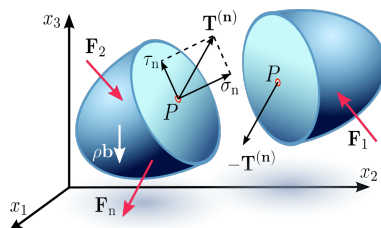
$$\sigma_{red.} = \sigma_{meg.} = \sqrt{\left(\frac{M_h d}{I} \frac{d}{2}\right)^2 + 4 \left(\frac{M_t d}{2I} \frac{d}{2}\right)^2} \rightarrow d. \quad (4.21)$$

Vagyis $d=51.3432$ mm.

FESZÜLTSG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

5.1. Összefoglalás

Egy deformálható testet terheljenek koncentrált erők \mathbf{F} és térfogaton megoszló erőrendszer. Ha az egész test egyensúlyban van akkor tetszőleges része is egyensúlyban kell, hogy legyen. Ha kettévágjuk a testet akkor az elvágott felület egy P pontjában megjelenik a feszültségvektor \mathbf{T} . Az elhagyott rész ugyanezen P pontjában pedig a $-\mathbf{T}$. A feszültségállapot ábrázolására vegyünk ki a test egy tetszőleges pontjának kis környezetéből egy elemet. Terhelés hatására ebben a pontban a 5.1 ábrán látható módon tudjuk ábrázolni a feszültségeket. Ismét a test egy pontjának feszültségállapota ha abban a pontban ismert a

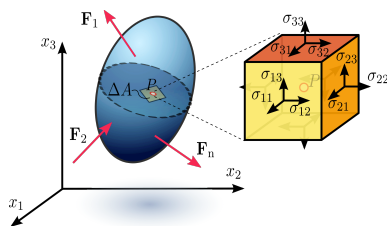


5.1. ábra. Feszültségvektor (wiki)

feszültség tenzor mátrixának minden eleme. A mátrix elemei a következők

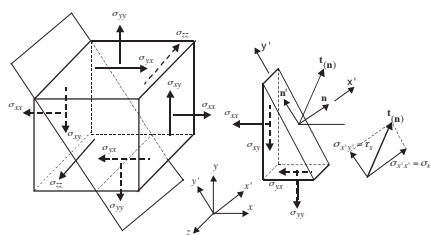
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

5. FESZÜLTÉS, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA



5.2. ábra. Feszültségállapot ábrázolása (wiki)

A feszültségek tetszőleges irányban meghatározhatóak egy adott ismert állapot esetén. Adott a feszültségállapot a derékszögű x, y, z koordinátarendszerben. Vegyünk fel egy síkot amelynek a normál egységvektora \mathbf{n} , ezt az x tengelytől való elforgatással nyerjük. A forgatás szöge legyen φ . Ezzel megkaptuk az x' irányt. Analóg módon adódik az y' irány. Tehát a normál egységvektor



5.3. ábra. Feszültségek transzformációja

$\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$. A feszültségvektor pedig $\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ alapján

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ \tau_{xy} \cos \varphi + \sigma_y \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

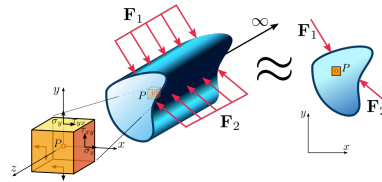
A feszültségvektor helyett azonban az adott irányba eső feszültség komponensek érdekesek vagyis $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$. Ezek számíthatóak az alábbi szorzatok alapján

$$\sigma_{x'} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma_x \cos^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi \quad (5.3)$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi \quad (5.4)$$

$$\sigma_{y'} = -(-\sigma_x \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi) \sin \varphi + (-\tau_{xy} \sin \varphi + \sigma_y \cos \varphi) \cos \varphi \quad (5.5)$$

Síkfeszültségállapot esetén a forgatás után kapott feszültség komponensek



tetszőleges φ szöggel adott síkon könnyen számolhatóak az alábbi összefüggéssel

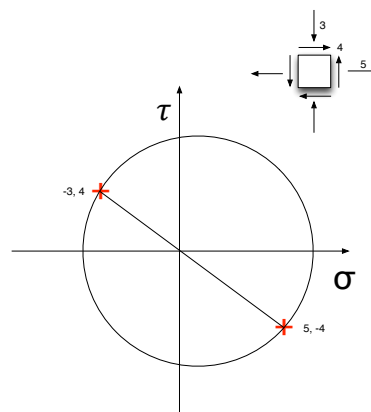
$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

ahol \mathbf{A} a transzformációs mátrix. Ez az alak csak síkfeszültség esetén használható derékszögű koordinátarendszerben.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi^2 & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi^2 & \cos^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Előjelszabály a Mohr kör felrajzolásához: **pozitívnak tekintjük a csúsztatófeszültséget, ha az óramutató járásával megegyező irányba forog, különben negatív.** Példaként adott $\sigma_x = 5, \sigma_y = -3, \tau_{xy} = 4$. Rajzoljuk fel a Mohr kört.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$



5.4. ábra. A Mohr kör

5. FESZÜLTÉS, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

1. Feladat

Az alábbi nem nulla elemek ismertek a feszültségi mátrixban $\sigma_x = 80$, $\sigma_y = 20$, $\tau_{xy} = -26$ MPa.

- (a) Határozza meg a feszültségeket azon a felületen amely $\varphi=30$ fokkal van elforgatva!

1. Megoldás

A feszültségmátrix alakja (síkfeszültség)

$$\sigma = \begin{bmatrix} 80 & -26 & 0 \\ -26 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Ezeket az értékeket ábrázolva a $\tau - \sigma$ síkon, figyelembe véve a csúsztatófeszültségek előjelére vonatkozó előjelszabályt (lásd az 5.1) adódik az X (80, 26) és az Y (20, -26) pont. A két pontot összekötő átmérő középpontja az (50,0) pontban van. A kör sugara

$$r = \sqrt{30^2 + 26^2} = 39.7$$

A kérdéses irányban a feszültségekhez az X pontot a felületelem forgatásával φ megegyező irányba, annak kétszeresével (2φ) forgassuk el. Ezzel megkaptuk az X' és Y' pontokat. Ezeket levetítve számolhatóak a $\sigma_{X'}$, $\sigma_{Y'}$, $\tau_{X'Y'}$ feszültségek. Az elforgatott elemre a normálfeszültségek értelemszerűen (pozitív a húzófeszültség) rajzolandóak fel. A csúsztatófeszültség iránya az x' tengelyre merőleges oldalon pedig úgy kell álljon, hogy a felületelemet az óramutató járásával megegyező irányba forgassa (lásd 5.1).

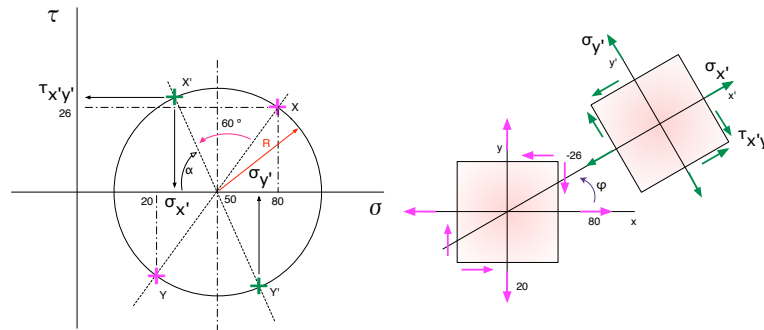
Az ábra alapján a feszültségek

$$\alpha = 180 - \arctan \frac{26}{30} - 2\varphi = 79.09 \text{ deg} \quad (5.9)$$

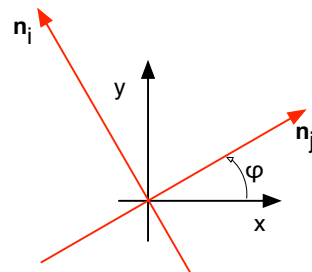
$$\sigma_{X'} = 50 - \cos \alpha R = 42.29 \text{ MPa} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{Y'} = 50 + \cos \alpha R = 57.51 \text{ MPa} \quad (5.11)$$

$$\tau_{X'Y'} = \sin \alpha R = 38.98 \text{ MPa} \quad (5.12)$$



5.5. ábra. Grafikus megoldás



$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{n}_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

2. Megoldás

A kérdéses irányban a feszültségek számítása a

$$\sigma_i = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i \quad (5.13)$$

$$\sigma_j = \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j \quad (5.14)$$

$$\tau_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j \quad (5.15)$$

egyenletek segítségével is számolható, ahol $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$ a kérdéses sík normál egységvektora és a síkban fekvő egységvektora. A két vektor most

Ezzel a feszültségek a mátrix-vektor szorzást nem részletezve

$$\sigma_{x'} = 42.48 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = 57.52 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = -39.98 \text{ MPa} \quad (5.18)$$

Az eredmények egybevágznak a grafikus módszerrel kapott értékekkel. Síkfeszültség esetén a fenti szorzat (5.13) leegyszerűsíthető a

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

5. FESZÜLTÉS, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

szorzatra (lásd 5.1).

2. Feladat

Az alábbi nem nulla elemek ismertek a feszültségi mátrixban $\sigma_x = 80$, $\sigma_y = 20$, $\tau_{xy} = -26$ MPa.

(a) Határozza meg a feszültségeket azon a felületen amely $\varphi = -30$ fokkal van elforgatva!

1. Megoldás

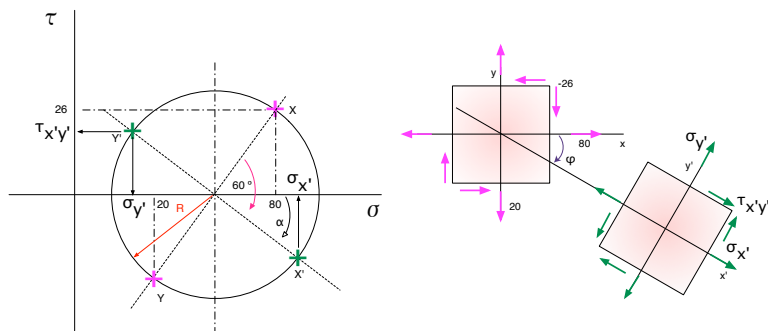
A feszültségmátrix alakja

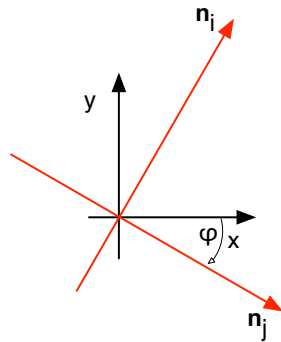
$$\sigma = \begin{bmatrix} 80 & -26 & 0 \\ -26 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Ezeket az értékeket ábrázolva a $\tau - \sigma$ síkon, figyelembe véve a csúsztatófeszültségek előjelére vonatkozó előjelszabályt (lásd az 5.1) adódik az X (80, 26) és az Y (20, -26) pont. A két pontot összekötő átmérő középpontja az (50,0) pontban van. A kör sugara

$$r = \sqrt{30^2 + 26^2} = 39.7$$

A kérdéses irányban a feszültségekhez az X pontot a felületelem forgatásával φ megegyező irányba, annak kétszeresével (2φ) forgassuk el. Ezzel megkaptuk az X' és Y' pontokat. Ezeket levetítve számolhatóak a $\sigma_{X'}$, $\sigma_{Y'}$, $\tau_{X'Y'}$ feszültségek.





$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{n}_j = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Az ábra alapján a feszültségek

$$\alpha = 60 - \arctan \frac{26}{30} = 19.09 \text{ deg} \quad (5.20)$$

$$\sigma_{x'} = 50 - \cos \alpha R = 87.517 \text{ MPa} \quad (5.21)$$

$$\sigma_{y'} = 50 + \cos \alpha R = 12.483 \text{ MPa} \quad (5.22)$$

$$\tau_{x'y'} = \sin \alpha R = 12.984 \text{ MPa} \quad (5.23)$$

2. Megoldás

A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján

$$\sigma_i = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i \quad (5.24)$$

$$\sigma_j = \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j \quad (5.25)$$

$$\tau_{ij} = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j \quad (5.26)$$

ahol a vektorok most

A megoldás pedig

$$\sigma_{x'} = 87.5167 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = 12.4833 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 12.9808 \text{ MPa} \quad (5.29)$$

3. Feladat

Az alábbi nem nulla elemek ismertek a feszültségi mátrixban $\sigma_x = 40$, $\tau_{xy} = 30$ MPa.

- (a) Határozza meg a feszültségeket azon a felületen amely $\psi = 50$ fokot zár be a vízszintessel!

5. FESZÜLTSEG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

1. Megoldás

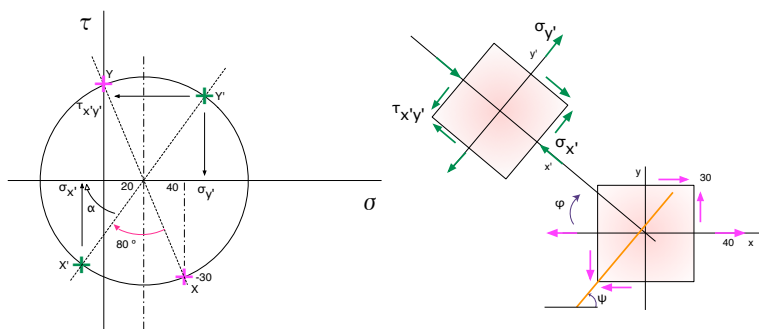
A feszültségmátrix alakja

$$\sigma = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Ezeket az értékeket ábrázolva a $\tau - \sigma$ síkon, figyelembe véve a csúszatófeszültségek előjelére vonatkozó előjelszabályt (lásd az 5.1) adódik az X (40, -30) és az Y (0, 30) pont. A két pontot összekötő átmérő középpontja a (20,0) pontban van. A kör sugara

$$r = \sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300}$$

A kérdéses irányban a feszültségekhez az X pontot a felületelem forgatásával φ megegyező irányba, annak kétszeresével (2φ) forgassuk el ($\varphi=40$ deg). Ezzel megkaptuk az X' és Y' pontokat. Ezeket levetítve számolhatóak a $\sigma_{X'}$, $\sigma_{Y'}$, $\tau_{X'Y'}$ feszültségek.



Az ábra alapján a feszültségek

$$\alpha = 180 - \arctan \frac{3}{2} - 2\varphi = 43.7 \text{ deg} \quad (5.30)$$

$$\sigma_{X'} = 50 - \cos \alpha R = -6.02 \text{ MPa} \quad (5.31)$$

$$\sigma_{Y'} = 50 + \cos \alpha R = 46.07 \text{ MPa} \quad (5.32)$$

$$\tau_{X'Y'} = \sin \alpha R = 24.91 \text{ MPa} \quad (5.33)$$

2. Megoldás

Az előzőekben mutatott módszer alapján felírhatóak a szükséges $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$ vektorok. A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján pedig

$$\sigma_{x'} = -6.02 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = 46.07 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 24.91 \text{ MPa} \quad (5.34)$$

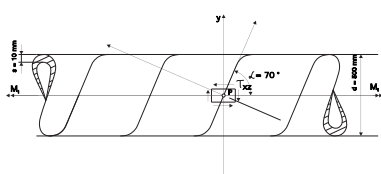
5. FESZÜLTÉS, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

4. Feladat

Az alábbi lemezből, melynek vastagsága 10 mm, összehegesztett csövet csavarónyomaték terhel, $M=100 \text{ kNm}$. A varrat szöge $\psi=70 \text{ deg}$. A külső átmérő 500 mm.

(a) Határozza meg a feszültségeket a varratban!

A feszültségmátrix alakja (tiszta nyírás)

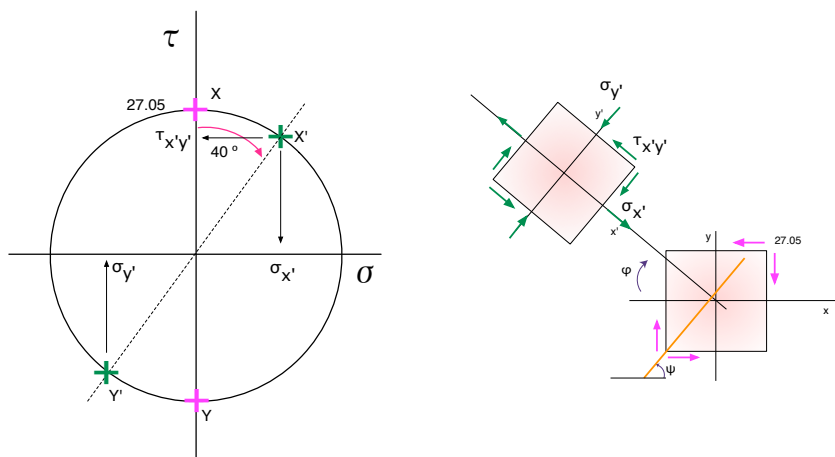


$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -27.05 & 0 \\ -27.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

ahol a csúsztatófeszültség a $\tau_{xy} = \frac{M d}{I_p 2}$ képlet alapján számolható.

1. Megoldás

Az ábra szerkesztése az előzőek alapján megrajzolható ($\varphi=20 \text{ deg}$). Ezzel a feszültségek



$$\sigma_{x'} = 17.38 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = -17.38 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 20.72 \text{ MPa} \quad (5.35)$$

2. Megoldás

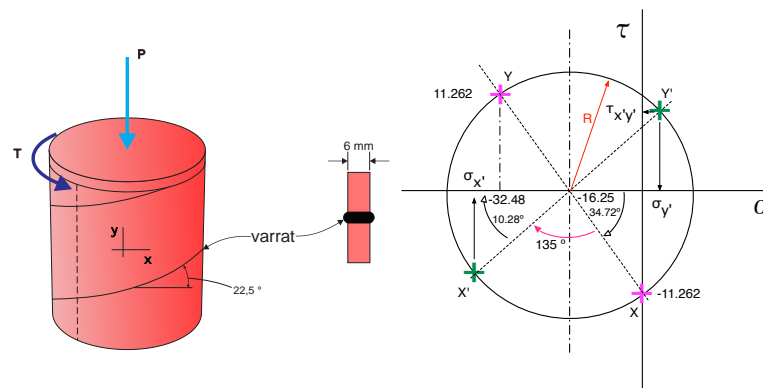
Az előzőekben mutatott módszer alapján felírhatóak a szükséges $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$ vektorok. A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján pedig

$$\sigma_{x'} = 17.38 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = -17.38 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 20.72 \text{ MPa} \quad (5.36)$$

5. Feladat

Az alábbi lemezből, melynek vastagsága 6 mm, összehegesztett csövet csavarónyomaték és erő terhel, $T=9 \text{ kNm}$ és $P=180 \text{ kN}$. A varrat szöge ψ 22.5 deg. A külső átmérő 300 mm.

(a) Határozza meg a feszültségeket a varratban!



1. Megoldás

A feszültségmátrix alakja

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 11.262 & 0 \\ 11.262 & -32.48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

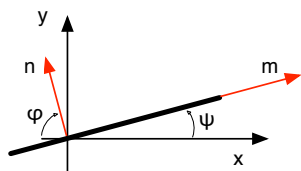
ahol σ_y a nyomásból és τ_{xy} a csavarásból számolható.

2. Megoldás

Az előzőekben mutatott módszer alapján felírhatóak a szükséges \mathbf{n}, \mathbf{m} vektorok. A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján pedig

$$\sigma_{x'} = -35.687 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = 3.207 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 3.52 \text{ MPa} \quad (5.40)$$

5. FESZÜLTÉS, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA



A varrat normálisa a vízszintessel $\varphi=22.5$ fokot zár be. A kör középpontja $-\sigma_y/2$ -nél van. A kör sugara pedig

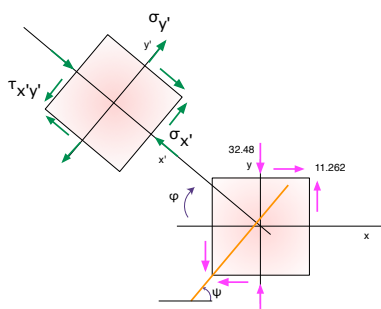
$$r = \sqrt{16.24^2 + 11.2^2} = 19.74$$

Ezekkel a feszültségek az ábrából számolva

$$\sigma_{x'} = -35.687 \text{ MPa}, \quad (5.37)$$

$$\sigma_{y'} = 3.207 \text{ MPa}, \quad (5.38)$$

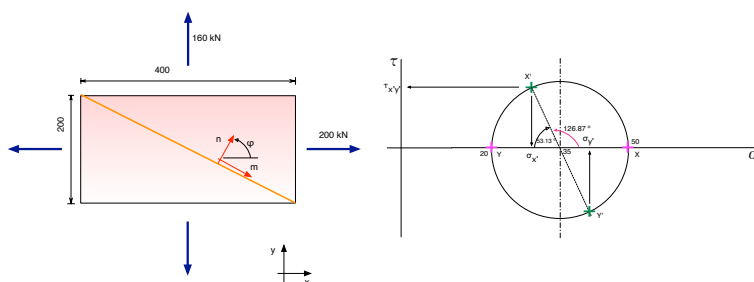
$$\tau_{x'y'} = 3.52 \text{ MPa} \quad (5.39)$$



6. Feladat

Az alábbi két elemet az átló mentén összeragasztjuk. A vastagság $t=20$ mm.

(a) Határozza meg a feszültségeket a ragasztás mentén!

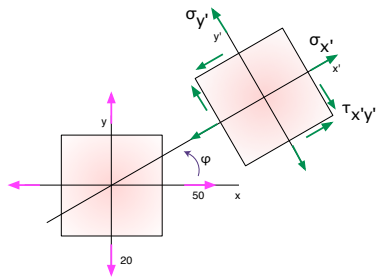


1. Megoldás

A feszültségmátrix alakja

$$\sigma = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

ahol σ_x, σ_y a húzásból számolható. A sík normálisa a vízszintessel $\varphi=63.435$ fokot zár be. A kör középpontja 35-nél van. A kör sugara pedig $r=15$.



Ezekkel a feszültségek az ábrából számolva

$$\sigma_{x'} = 26 \text{ MPa}, \quad (5.41)$$

$$\sigma_{y'} = 44 \text{ MPa}, \quad (5.42)$$

$$\tau_{x'y'} = 12 \text{ MPa} \quad (5.43)$$

2. Megoldás

Az előzőekben mutatott módszer alapján felírhatóak a szükséges **n, m** vektorok. A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján pedig

$$\sigma_{x'} = 26 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = 44 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 12 \text{ MPa} \quad (5.44)$$

5. FESZÜLTÉS, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

7. Feladat

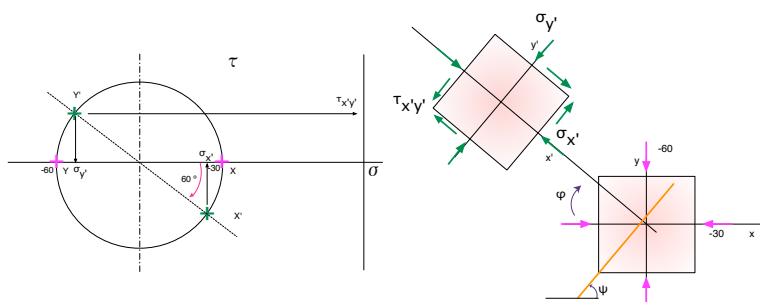
Az alábbi nem nulla elemek ismertek a feszültségi mátrixban $\sigma_x = -30$, $\sigma_y = -60$ MPa.

- (a) Határozza meg a feszültségeket azon a felületen amely ψ 60 fokot zár be a vízszintessel!

1. Megoldás

A feszültségmátrix alakja

$$\sigma = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



A sík normálisa a vízszintessel $\varphi=30$ fokot zár be. A kör középpontja -45 -nél van. A kör sugara pedig $r=15$. Ezekkel a feszültségek az ábrából számolva

$$\sigma_{x'} = -37.5 \text{ MPa}, \quad (5.45)$$

$$\sigma_{y'} = -52.5 \text{ MPa}, \quad (5.46)$$

$$\tau_{x'y'} = 13 \text{ MPa} \quad (5.47)$$

2. Megoldás

Az előzőekben mutatott módszer alapján felírhatóak a szükséges \mathbf{n} , \mathbf{m} vektorok. A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján pedig

$$\sigma_{x'} = -37.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = -52.5 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 13 \text{ MPa} \quad (5.48)$$

8. Feladat

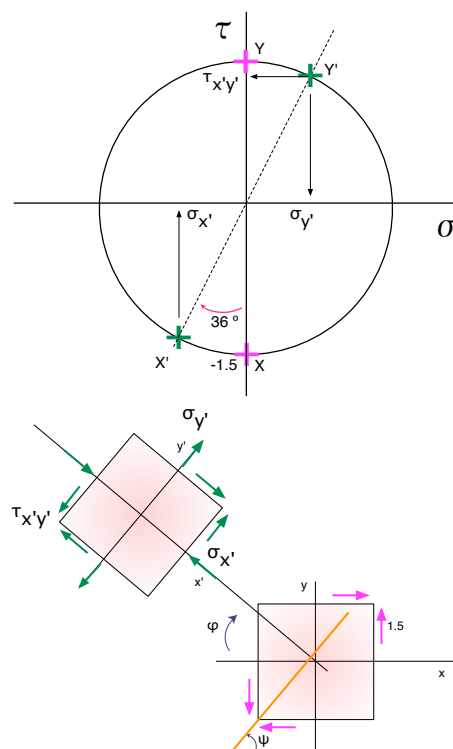
A nem zérus elem a feszültség mátrixban $\tau_{xy}=1.5$ MPa.

- (a) Határozza meg a feszültségeket azon a felületen amely ψ 72 fokot zár be a vízszintessel!

1. Megoldás

A feszültségmátrix alakja

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$



A sík normálisa a vízszintessel $\varphi=18$ fokot zár be. A kör középpontja az origó. A kör sugara pedig $r=1.5$. Ezekkel a feszültségek az ábrából

5. FESZÜLTSEG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

számolva

$$\sigma_{x'} = -0.88 \text{ MPa}, \quad (5.49)$$

$$\sigma_{y'} = 0.88 \text{ MPa}, \quad (5.50)$$

$$\tau_{x'y'} = 1.21 \text{ MPa} \quad (5.51)$$

2. Megoldás

Az előzőekben mutatott módszer alapján felírhatóak a szükséges \mathbf{n} , \mathbf{m} vektorok. A feszültségek számítása mátrix-vektor szorzat alapján pedig

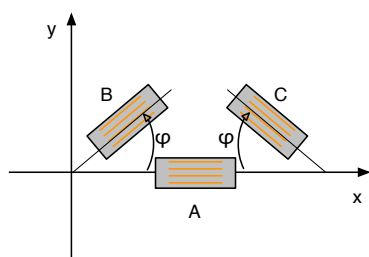
$$\sigma_{x'} = -0.88 \text{ MPa}, \quad \sigma_{y'} = 0.88 \text{ MPa}, \quad \tau_{x'y'} = 1.21 \text{ MPa} \quad (5.52)$$

9. Feladat

Egy alkatrész felületén az adott három irányba nyúlásmérő bélyegeket ragasztottak. A mért értékek rendre $\varepsilon_A = 1100 \mu$, $\varepsilon_B = 1496 \mu$, $\varepsilon_C = -39.44 \mu$. Young modulusa $E=70 \text{ GPa}$, $\nu=0.33$, $\varphi=40 \text{ deg}$.

- (a) Határozza meg az ε elemeit!
 (b) Határozza meg a σ_x feszültséget!

Megoldás



A mért irányokban a fajlagos hosszváltozások a

$$\varepsilon_A = \mathbf{n}_A^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_A \quad (5.53)$$

$$\varepsilon_B = \mathbf{n}_B^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_B \quad (5.54)$$

$$\varepsilon_C = \mathbf{n}_C^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_C \quad (5.55)$$

egyenletekből számolhatóak, ahol $\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C$ az adott irányok egységvektorai.

Az alakváltozási mátrix alakja pedig

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

A síkfeszültségállapot miatt $\sigma_z=0$. Ezt felhasználva az általános Hooke törvény

$$\sigma_z = 0 \rightarrow 0 = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad (5.56)$$

Az egyenletrendszer megoldása után

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1100 \mu & \frac{1}{2}1559.13 \mu & 0 \\ \frac{1}{2}1559.13 \mu & 200.335 \mu & 0 \\ 0 & 0 & -640.463 \mu \end{bmatrix}$$

Felhasználva az általános Hooke törvényt

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 91.6 \text{ MPa} \quad (5.57)$$

10. Feladat

Egy alkatrész felületén az adott három irányba nyúlásmérő bélyegeket ragasztottak. A mért értékek rendre $\varepsilon_A = 1100 \mu$, $\varepsilon_B = 200 \mu$, $\varepsilon_C = 200 \mu$. Young modulusa $E=45 \text{ GPa}$, $\nu=0.35$, $\varphi=30 \text{ deg}$.

- (a) Határozza meg az ε elemeit!
- (b) Határozza meg a σ elemeit!
- (c) Határozza meg a főfeszültséget!
- (d) Határozza meg a főnyúlásokat!

Megoldás

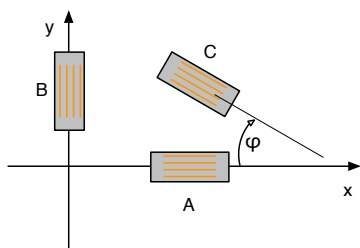
Az alakváltozási mátrix alakja pedig

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

A síkfeszültségállapot miatt $\sigma_z=0$. Ezt felhasználva az általános Hooke törvény

$$\sigma_z = 0 \rightarrow 0 = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad (5.61)$$

5. FESZÜLTÉG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA



A mért irányokban a fajlagos hosszváltozások a

$$\varepsilon_A = \mathbf{n}_A^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_A \quad (5.58)$$

$$\varepsilon_B = \mathbf{n}_B^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_B \quad (5.59)$$

$$\varepsilon_C = \mathbf{n}_C^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_C \quad (5.60)$$

egyenletekből számolhatóak, ahol $\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C$ az adott irányok egységvektorai.

Az egyenletrendszer megoldása után

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1100 \mu & \frac{1}{2}1558.9 \mu & 0 \\ \frac{1}{2}1558.9 \mu & 200 \mu & 0 \\ 0 & 0 & -700 \mu \end{bmatrix}$$

A főnyúlások sajátérték számítás alapján

$$\varepsilon_1 = 1550 \mu \quad (5.62)$$

$$\varepsilon_2 = -250 \mu \quad (5.63)$$

$$\varepsilon_3 = -700 \mu \quad (5.64)$$

Felhasználva az általános Hooke törvényt

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 60 \text{ MPa} \quad (5.65)$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] = 30 \text{ MPa} \quad (5.66)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 25.98 \text{ MPa} \quad (5.67)$$

A főfeszültségek sajátérték számítás alapján

$$\sigma_1 = 75 \text{ MPa} \quad (5.68)$$

$$\sigma_2 = 15 \text{ MPa} \quad (5.69)$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa} \quad (5.70)$$

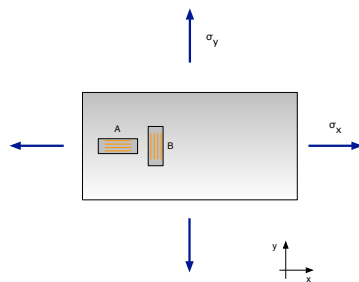
11. Feladat

Egy téglalap alakú acéllemezben σ_x, σ_y feszültség ébred egyenletesen megoszló erőrendszer hatására. A vastagság 10 mm. Két nyúlásmérő bélyeg került felragasztásra a lemezre, A és B. A mért értékek $\varepsilon_A = 480 \mu$, $\varepsilon_B = 130 \mu$. Young modulus $E=200$ GPa, $\nu=0.3$.

- (a) Határozza meg σ_x, σ_y feszültségeket!
 (b) Határozza meg a vastagság megváltozását!

Megoldás

Síkfeszültségi állapot miatt $\sigma_z=0$. Felírva az általános Hooke törvényt



$$\sigma_z = 0 \rightarrow$$

$$0 = 2G \left[\varepsilon_z + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{1 - 2\nu} \right]$$

$$\sigma_y = 2G \left[\varepsilon_y + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{1 - 2\nu} \right]$$

$$\sigma_x = 2G \left[\varepsilon_x + \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{1 - 2\nu} \right]$$

A megoldása pedig

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = 114.1 \text{ MPa} \quad (5.71)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = 60.2 \text{ MPa} \quad (5.72)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -261.4 \mu \quad (5.73)$$

A vastagság megváltozása pedig

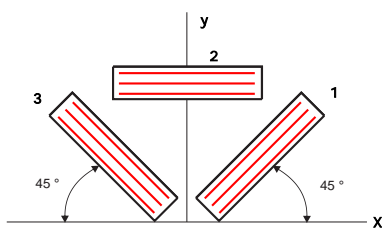
$$\delta t = \varepsilon_z t = -2610 \cdot 10^{-6} \text{ mm} \quad (5.74)$$

5. FESZÜLTSEG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

12. Feladat

Mérésből ismert a három irányban a fajlagos hosszváltozás. Ezek rendre $\varepsilon_1 = 110 \mu$, $\varepsilon_2 = 212.5 \mu$, $\varepsilon_3 = 240 \mu$.

(a) Határozza meg a síkba eső főnyúlásokat!



5.6. ábra. Nyúlásmérő bélyegek.

Megoldás

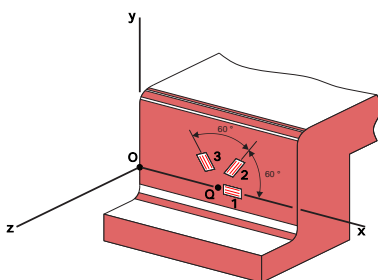
$$\varepsilon_1 = 250 \mu, \varepsilon_2 = 100 \mu.$$

13. Feladat

Mérésből ismert a három irányban a fajlagos hosszváltozás. Ezek rendre $\varepsilon_1 = 40 \mu$, $\varepsilon_2 = 980 \mu$, $\varepsilon_3 = 330 \mu$, $\nu = 0.29$.

(a) Határozza meg ε_x , ε_y , γ_{xy} értékét!

(b) Határozza meg a főnyúlásokat!



5.7. ábra. Nyúlásmérő bélyegek.

Megoldás

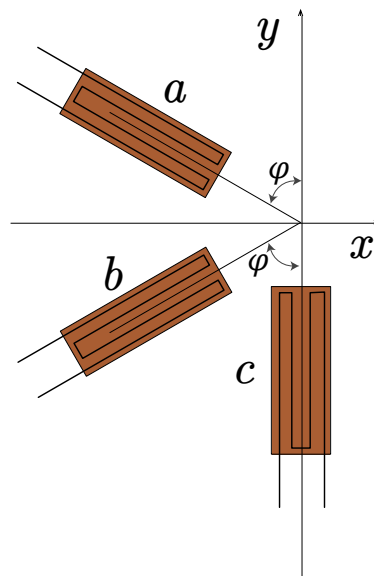
$$\varepsilon_x = 40 \mu, \varepsilon_y = 860 \mu, \gamma_{xy} = 750 \mu, \varepsilon_1 = 1006 \mu, \varepsilon_2 = -106 \mu, \varepsilon_3 = -368 \mu.$$

14. Feladat

Mérésből ismert a három irányban a fajlagos hosszváltozás. Ezek rendre $\varepsilon_a = 600 \mu$, $\varepsilon_b = -700 \mu$, $\varepsilon_c = 350 \mu$, $\nu = 0.25$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\varphi = 60 \text{ deg}$.

(a) Határozza meg ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} értékét!

(b) Határozza meg a főfeszültségeket!



5.8. ábra. Nyúlásmérő bélyegek.

Megoldás

Az egyes irányokba felírt egyenletek

$$\varepsilon_a = \mathbf{e}_a^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\gamma_{xy} + 0.00118357 = 1.73205\varepsilon_x, \quad (5.75)$$

$$\varepsilon_b = \mathbf{e}_b^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_b = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (5.76)$$

$$1.73205\varepsilon_x + \gamma_{xy} + 0.00181865 = 0.$$

5. FESZÜLTÉG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA

Az egyenletrendszer megoldása pedig

$$\gamma_{xy} = -1501.1 \cdot 10^{-6}, \quad (5.77)$$

$$\varepsilon_x = -183.33 \cdot 10^{-6}. \quad (5.78)$$

Felhasználva, hogy $\sigma_z = 0$,

$$0 = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) \rightarrow \varepsilon_z = -55.55 \cdot 10^{-6}. \quad (5.79)$$

Az egyes feszültségek

$$\sigma_x = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) = -20.44 \text{ MPa}, \quad (5.80)$$

$$\sigma_y = 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) = 64.88 \text{ MPa}, \quad (5.81)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -187.638 \text{ MPa}. \quad (5.82)$$

Az egyes sajátértékek

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 214.646, \quad \lambda_2 = -170.206. \quad (5.83)$$

A főfeszültségek pedig $\sigma_1 = 214.646 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -170.206 \text{ MPa}$.

15. Feladat

Mérésből ismert a három irányban a fajlagos hosszváltozás. Ezek rendre $\varepsilon_a = 300 \mu$, $\varepsilon_b = -250 \mu$, $\varepsilon_c = -450 \mu$, $\nu = 0.25$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\varphi = 45 \text{ deg}$.

(a) Határozza meg ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} értékét!

(b) Határozza meg a főfeszültségeket!

Megoldás

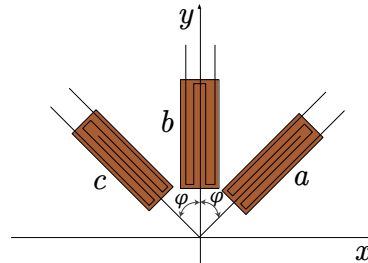
Az egyes irányokba felírt egyenletek

$$\varepsilon_a = \mathbf{e}_a^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\varepsilon_x + \gamma_{xy} = 0.00085, \quad (5.84)$$

$$\varepsilon_c = \mathbf{e}_c^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{e}_c = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 0 \\ 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_x + 0.00065.$$



5.9. ábra. Nyúlásmérő bélyegek.

Az egyenletrendszer megoldása pedig

$$\gamma_{xy} = 750 \cdot 10^{-6}, \quad (5.86)$$

$$\varepsilon_x = 100 \cdot 10^{-6}. \quad (5.87)$$

Felhasználva, hogy $\sigma_z = 0$,

$$0 = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) \rightarrow \varepsilon_z = 166.67 \cdot 10^{-6}. \quad (5.88)$$

Az egyes feszültségek

$$\sigma_x = 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) = 13.33 \text{ MPa}, \quad (5.89)$$

$$\sigma_y = 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) = -42.66 \text{ MPa}, \quad (5.90)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 60 \text{ MPa}. \quad (5.91)$$

Az egyes sajátértékek

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = -80.8747, \quad \lambda_2 = 51.5447. \quad (5.92)$$

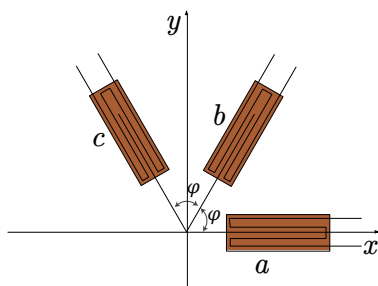
A főfeszültségek pedig $\sigma_1 = 51.5447 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -80.8747 \text{ MPa}$.

16. Feladat

Mérésből ismert a három irányban a fajlagos hosszváltozás. Ezek rendre $\varepsilon_a = -100 \mu$, $\varepsilon_b = 250 \mu$, $\varepsilon_c = 150 \mu$, $\nu = 0.25$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\varphi = 60 \text{ deg}$.

(a) Határozza meg ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} értékét!

5. FESZÜLTÉG, ALAKVÁLTOZÁS TRANSZFORMÁCIÓJA



5.10. ábra. Nyúlásmérő bélyegek.

(b) Határozza meg a főfeszültségeket!

Az eredmények

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = -100 \mu, \quad (5.93)$$

$$\varepsilon_y = 300 \mu, \quad (5.94)$$

$$\gamma_{xy} = 115.47 \mu, \quad (5.95)$$

$$\varepsilon_z = -200/3 \mu. \quad (5.96)$$

A feszültségek pedig

$$\sigma_x = -5.33 \text{ MPa}, \quad (5.97)$$

$$\sigma_y = 58.672 \text{ MPa}, \quad (5.98)$$

$$\tau_{xy} = 9.2376 \text{ MPa}. \quad (5.99)$$

A főfeszültségek pedig

$$\sigma_1 = 59.9786 \text{ MPa}, \quad (5.100)$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \quad (5.101)$$

$$\sigma_3 = -6.63662 \text{ MPa}. \quad (5.102)$$

6.1. Összefoglalás

Tartók keresztmetszetének elmozdulása/elfordulása számítható a különböző igénybevételek ismerete után, vagyis a hajlításból, húzás/nyomásból és csavarásból

$$x/\varphi = \int \frac{1}{IE} Mm \, ds + \int \frac{1}{AE} Nn \, ds + \int \frac{1}{I_p G} M_t m_t \, ds. \quad (6.1)$$

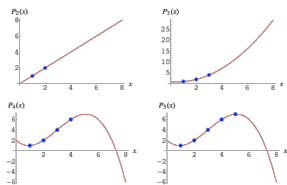
A nagybetűs függvények az adott terhelésből létrejövő, míg a kisbetűs függvények az egységnyi erőrendszerből számolható igénybevételek.

Az integrálás analitikus elvégzése helyett numerikusan számolunk. Számtalan algoritmus létezik, ezek közül a Simpson szabályt használtuk. A Simpson szabály egy Newton-Cotes formula amely másodfokú polinomok (egyenes vonalszakaszok helyett parabola ívek) segítségével közelíti a függvény integrálját. A Simpson szabály levezethető egy harmadfokú Lagrange interpolációs polinom integrálásával. A Lagrange interpolációs polinom $P(x)$ egy $\leq (n-1)$ -ed fokú polinom ami áthalad az n ponton $(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))$ és megadható az alábbi módon

$$P(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x), \quad P_j(x) = y_j \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \quad (6.2)$$

Interaktív demo megnézhető itt.

6. DEFROMÁCIÓSZÁMÍTÁS



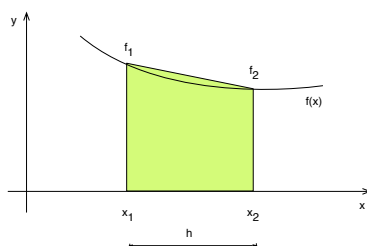
6.1. ábra. Lagrange interpolációs polinomok, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$, $P_5(x)$

Az $n=2$ eset a trapéz szabály, ilyenkor az integrált az alábbi módon számíthatjuk

$$x_2 = x_1 + h, \quad (6.3)$$

$$P_2(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2 = \frac{x}{h} (f_2 - f_1) + \left(f_1 + \frac{x_1}{h} f_1 - \frac{x_1}{h} f_2 \right), \quad (6.4)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{2} h (f_2 + f_1) - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi). \quad (6.5)$$



6.2. ábra. Trapéz szabály

Az $n=3$ eset a Simpson szabály, ilyenkor

$$x_2 = x_1 + h, \quad (6.6)$$

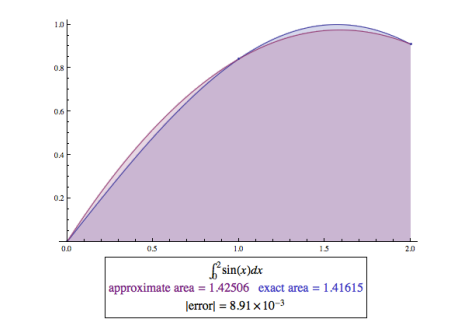
$$x_3 = x_1 + 2h, \quad (6.7)$$

$$P_3(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f_3, \quad (6.8)$$

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_1+2h} P_3(x) dx = \quad (6.9)$$

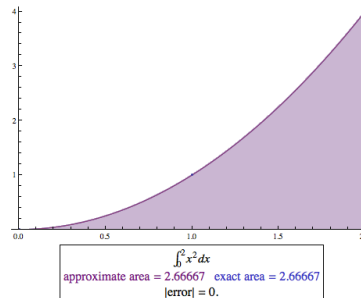
$$\frac{1}{3} h (f_1 + 4f_2 + f_3) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Ez a formula másodfokú polinomig az egzakt megoldást adja vissza. A 6.1 ábrán a szabály alkalmazása látható egy sin függvényen. A módszer nem az egzakt megoldást adja vissza, csak egy jó közelítés. A szabály alkalmazása



6.3. ábra. Simpson szabály egy sin függvényen alkalmazva

egy másodfokú görbén látható a 6.1 ábrán. Ilyen esetekben pontosan a görbe alatti területet kapjuk vissza.



6.4. ábra. Simpson szabály egy parabolán alkalmazva

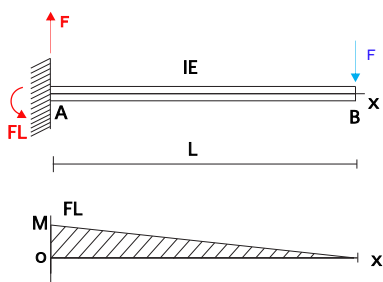
6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

1. Feladat

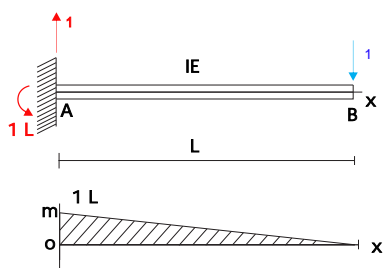
Az alábbi tartót a végén koncentrált erő terheli.

- (a) Határozza meg a B pont függőleges eltolódását y_B !
- (b) Határozza meg a B keresztmetszet elfordulását φ_B !

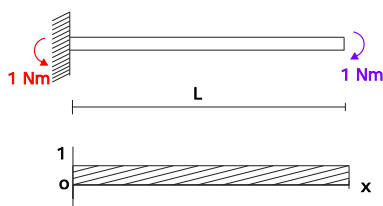
Megoldás



Első lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás számításához a B pontba teszünk egy egységnyi erőt.



Harmadik lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A keresztmetszet elfordulásának számításához a B pontba teszünk egy egységnyi nyomatékot.

Ezek után a kérdéses elmozdulás és elfordulás

$$y_B = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot m \, ds = \frac{FL^3}{3IE}, \quad (6.10)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot 1 \, ds = \frac{FL^2}{2IE}. \quad (6.11)$$

Részletezve a számítást

$$\int_A^B M \cdot m \, ds = \frac{L}{6} \left[FL \cdot L + 4 \frac{FL}{2} \cdot \frac{L}{2} \right] = \frac{FL^3}{3}, \quad (6.12)$$

valamint

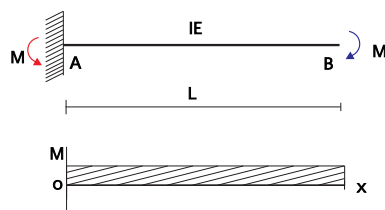
$$\int_A^B M \cdot 1 \, ds = \frac{L}{6} \left[FL \cdot 1 + 4 \frac{FL}{2} \cdot 1 \right] = \frac{FL^2}{2}. \quad (6.13)$$

2. Feladat

Az alábbi tartót a végén koncentrált nyomaték terheli.

- (a) Határozza meg a B pont függőleges eltolódását y_B !
- (b) Határozza meg a B keresztmetszet elfordulását φ_B !

Megoldás



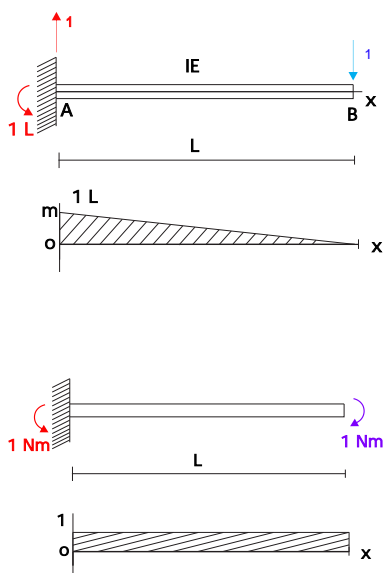
Első lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.

Ezek után a kérdéses elmozdulás és elfordulás

$$y_B = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot m \, ds = \frac{ML^2}{2IE}, \quad (6.14)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot 1 \, ds = \frac{ML}{IE}. \quad (6.15)$$

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS



Második lépésben a tartó nyomatóéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás számításához a B pontba teszünk egy egységnyi erőt.

Harmadik lépésben a tartó nyomatóéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A keresztmetszet elfordulásának számításához a B pontba teszünk egy egységnyi nyomatékot.

Részletezve a számítást

$$\int_A^B M \cdot m \, ds = \frac{L}{6} \left[ML + 4M \frac{L}{2} \right] = \frac{ML^2}{2}, \quad (6.16)$$

valamint

$$\int_A^B M \cdot 1 \, ds = \frac{L}{6} [M \cdot 1 + 4M \cdot 1 + M \cdot 1] = ML. \quad (6.17)$$

3. Feladat

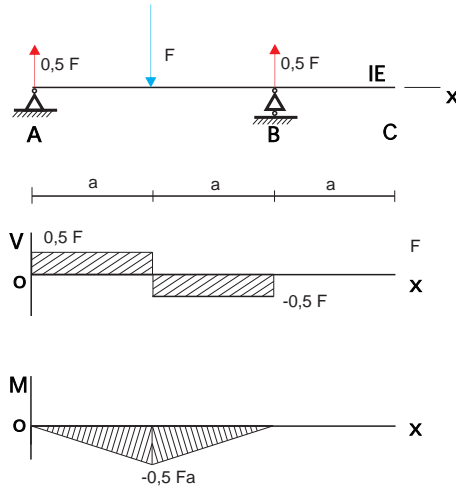
Az alábbi tartót koncentrált erő terheli.

(a) Határozza meg a C pont függőleges eltolódását y_C !

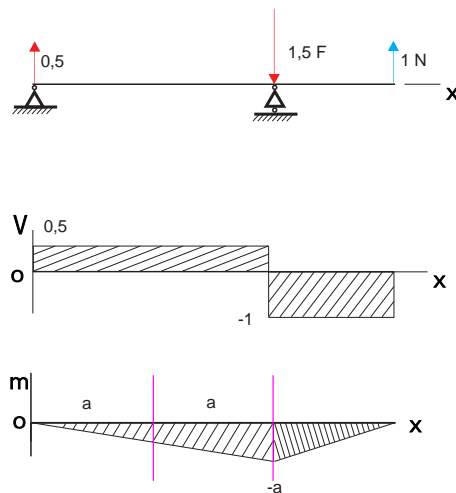
Megoldás

Ezek után a kérdéses elmozdulás és elfordulás

$$y_C = \frac{1}{IE} \int_A^C M \cdot m \, ds = \frac{a^3 F}{4IE}. \quad (6.18)$$



Első lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás számításához a C pontba teszünk egy egységnyi erőt.

Részletezve a számítást

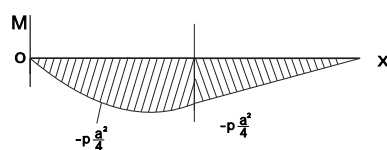
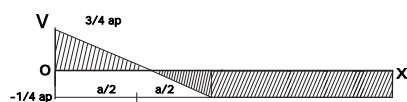
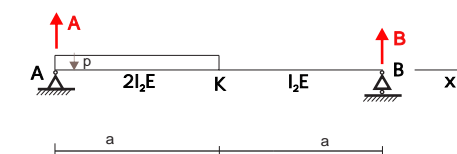
$$\int_A^C M \cdot m \, ds = \frac{a}{6} \left[4 \left(\frac{-aF}{4} \right) \left(\frac{-a}{4} \right) - \frac{aF}{2} \left(\frac{-a}{2} \right) \right] + \frac{a}{6} \left[\left(\frac{-aF}{2} \right) \left(\frac{-a}{2} \right) - 4 \frac{aF}{4} \left(\frac{-3a}{4} \right) \right] = \frac{a^3 F}{4}. \quad (6.19)$$

4. Feladat

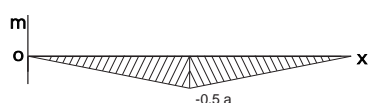
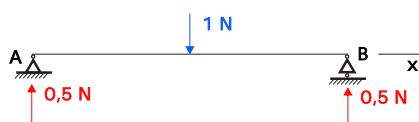
Az alábbi tartót állandó intenzitású erőrendszer terheli.

(a) Határozza meg a K pont függőleges eltolódását y_K !

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS



Első lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás számításához a K pontba teszünk egy egységnyi erőt.

Megoldás

Ezek után a kérdéses elmozdulás és elfordulás

$$y_K = \frac{1}{2IE} \int_A^K M \cdot m \, ds + \frac{1}{IE} \int_K^B M \cdot m \, ds = \frac{7a^4 p}{96IE}. \quad (6.20)$$

Részletezve a számítást

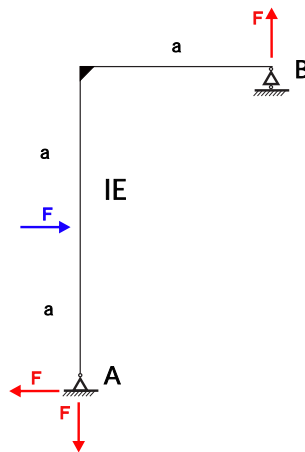
$$\int_A^K M \cdot m \, ds = \frac{a}{6} \left[4 \left(\frac{-a^2 p}{4} \right) \left(\frac{-a}{4} \right) + \left(\frac{-a^2 p}{4} \right) \left(\frac{-a}{2} \right) \right] = \frac{a^4 p}{16}, \quad (6.21)$$

$$\int_K^B M \cdot m \, ds = \frac{a}{6} \left[\left(\frac{-a^2 p}{4} \right) \left(\frac{-a}{2} \right) + 4 \left(\frac{-a^2 p}{8} \right) \left(\frac{-a}{4} \right) \right] = \frac{a^4 p}{24}.$$

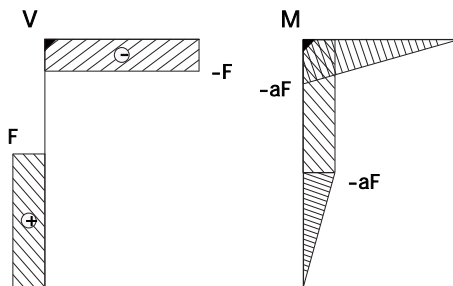
5. Feladat

Az alábbi tartót koncentrált erő terheli.

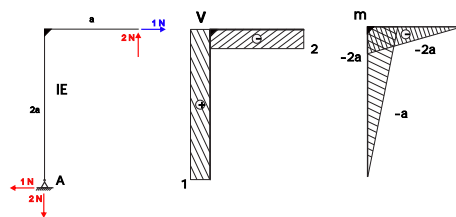
- (a) Határozza meg a B pont vízszintes eltolódását x_B !
- (b) Határozza meg a B keresztmetszet elfordulását φ_B !



Megoldás

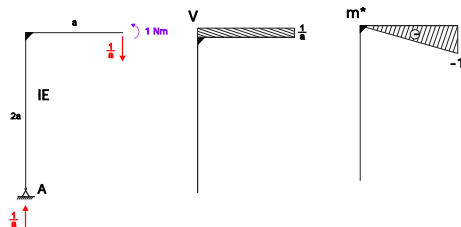


Első lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a tartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A vízszintes elmozdulás számításához a B pontba teszünk egy egységnyi erőt.

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS



Harmadik lépésben a tartó nyomatóképi ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A keresztmetszet elfordulásának számításához a B pontba teszünk egy egységnyi nyomatékot.

Ezek után a kérdéses elmozdulás és elfordulás

$$x_B = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot m \, ds = \frac{5a^3 F}{2IE}, \quad (6.22)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot m^* \, ds = \frac{a^2 F}{6IE}. \quad (6.23)$$

Részletezve a számítást

$$\begin{aligned} \int_A^B M \cdot m \, ds &= \frac{a}{6} \left[4 \left(\frac{-aF}{2} \right) \left(\frac{-a}{2} \right) + (-aF)(-a) \right] + \\ &\frac{a}{6} \left[(-aF)(-a) + 4(-aF) \left(\frac{-3a}{2} \right) + (-aF)(-2a) \right] + \\ &\frac{a}{6} \left[(-aF)(-2a) + 4 \left(\frac{-aF}{2} \right) (-a) \right] = \frac{5a^3 F}{2}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

valamint

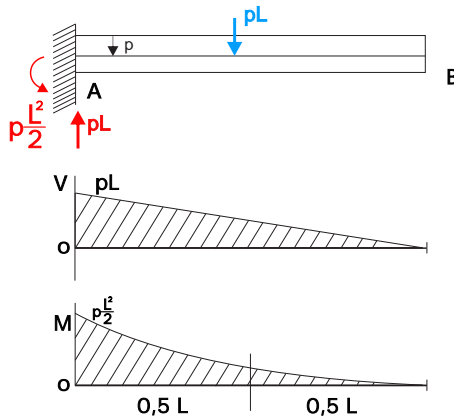
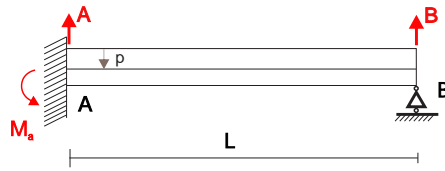
$$\int_A^B M \cdot m^* \, ds = \frac{a}{6} \left[4 \left(\frac{-aF}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{a^2 F}{6}. \quad (6.25)$$

6. Feladat

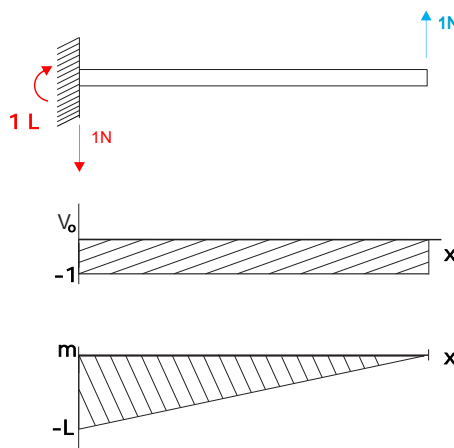
Az alábbi tartót megoszló erőrendszer terheli, $p=1000 \text{ N/m}$, $L=3 \text{ m}$.

(a) Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit!

Megoldás



Első lépésben a törzstartó (a B támasz elvétele) nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a törzstartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás felszabadítása miatt a B pontba teszünk egy egységnyi erőt.

A megoldandó egyenlet

$$\delta_{11} B + \delta_{10} = 0 \rightarrow B = \frac{3pL}{8} = 1125 \text{ N}, \quad (6.26)$$

ahol $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_A^B m^2 ds$ és $\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_A^B M \cdot m ds$. Mivel a merevség azonos, IE-t elhagyva

$$\delta_{11} = \frac{L}{6} \left[(-L)^2 + 4 \left(\frac{-L}{2} \right)^2 \right] = \frac{L^3}{3}. \quad (6.27)$$

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS

Hasonlóan

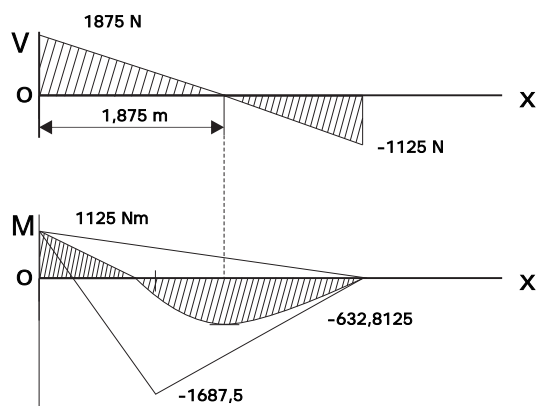
$$\delta_{10} = \frac{L}{6} \left[\frac{pL^2}{2} (-L) + 4 \frac{pL^2}{8} \left(\frac{-L}{2} \right) \right] = -\frac{pL^4}{8}. \quad (6.28)$$

Az egyensúlyi egyenletekből a kérdéses további reakciók

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A = \frac{5pL}{8} = 1875 \text{ N}, \quad (6.29)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_A = \frac{pL^2}{8} = 1125 \text{ Nm}. \quad (6.30)$$

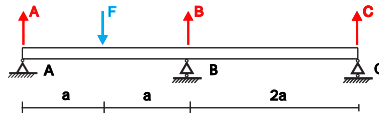
A határozatlan tartó igénybevételi ábrái tehát



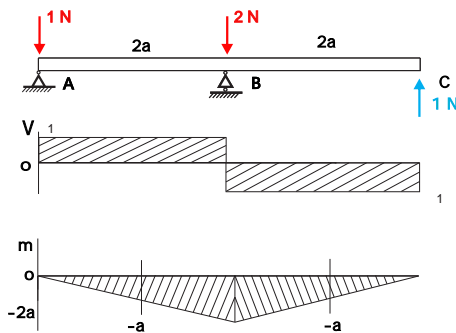
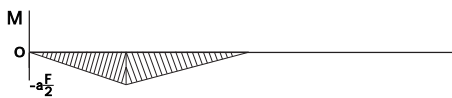
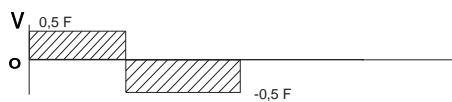
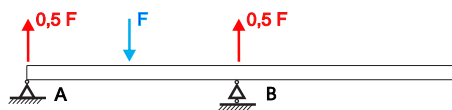
7. Feladat

Az alábbi tartót megoszló erőrendszer terheli.

(a) Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás



Első lépésben a törzstartó (a C támasz elvétele) nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.

Második lépésben a törzstartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás felszabadítása miatt a C pontba teszünk egy egységnyi erőt.

A megoldandó egyenlet

$$\delta_{11}C + \delta_{10} = 0 \rightarrow C = \frac{-3F}{32} = -93.75 \text{ N}, \quad (6.31)$$

ahol $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_A^C m^2 ds$ és $\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int_A^C M \cdot m ds$. Mivel a merevség azonos, IE-t elhagyva

$$\delta_{11} = 2 \frac{2a}{6} \left[4(-a)^2 + \left(\frac{-2a}{2} \right)^2 \right] = \frac{16a^3}{3}. \quad (6.32)$$

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

Hasonlóan

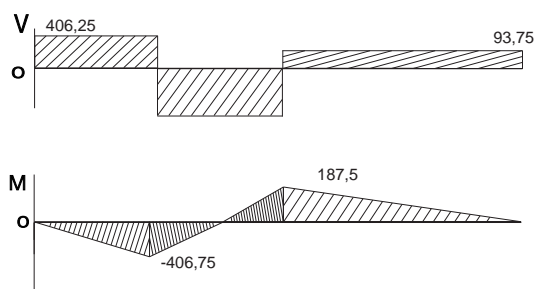
$$\delta_{10} = \frac{a}{6} \left[4 \left(\frac{-aF}{4} \right) \left(-\frac{a}{2} \right) + \left(\frac{-aF}{2} \right) (-a) \right] + \frac{a}{6} \left[\left(\frac{-aF}{2} \right) (-a) + 4 \left(\frac{-aF}{4} \right) \left(-\frac{3a}{2} \right) \right] = -\frac{a^3 F}{2}. \quad (6.33)$$

Az egyensúlyi egyenletekből a kérdéses további reakciók

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B = 687.5 \text{ N}, \quad (6.34)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow A = 406.25 \text{ N}. \quad (6.35)$$

A határozatlan tartó igénybevételi ábrái tehát



8. Feladat

Az alábbi tartót koncentrált erő terheli.

(a) Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit!

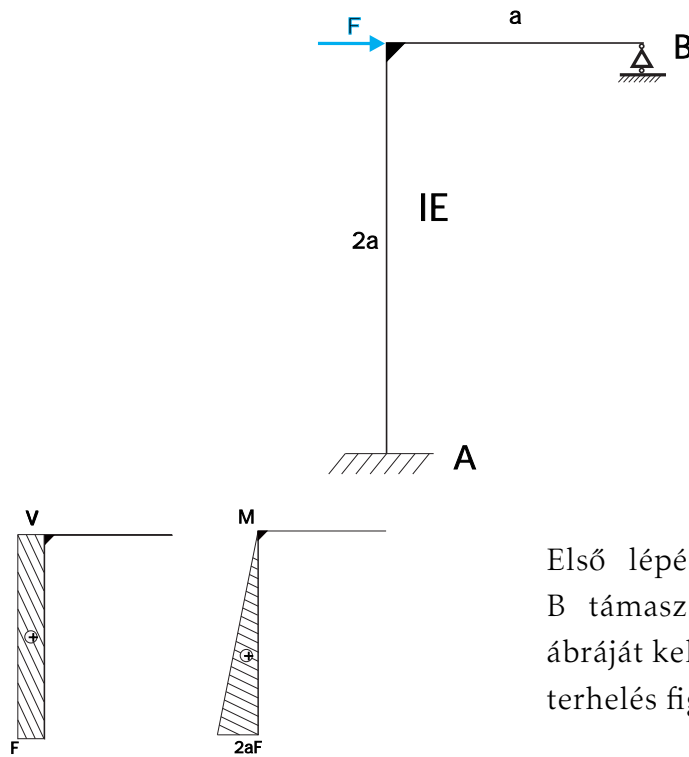
Megoldás

A megoldandó egyenlet

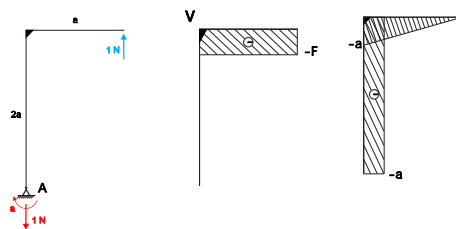
$$\delta_{11} B + \delta_{10} = 0 \rightarrow B = \frac{6F}{7}, \quad (6.36)$$

ahol $\delta_{11} = \frac{1}{IE} \int_A^B m^2 ds$ és $\delta_{10} = \frac{1}{IE} \int_A^B M \cdot m ds$. Mivel a merevség azonos, IE-t elhagyva

$$\delta_{11} = \frac{2a}{6} \left[(-a)^2 + 4(-a)^2 + (-a)^2 \right] + \frac{a}{6} \left[(-a)^2 + 4 \left(\frac{-a}{2} \right)^2 \right] = \frac{7a^3}{3}. \quad (6.37)$$



Első lépésben a törzstartó (a B támasz elvétele) nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a törzstartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás felszabadítása miatt a B pontba teszünk egy egységnyi erőt.

Hasonlóan

$$\delta_{10} = \frac{2a}{6} [(-a)(2aF) + 4(-a)(aF)] = -2a^3F. \quad (6.38)$$

Az egyensúlyi egyenletekből a kérdéses további reakciók

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A = -\frac{6F}{7}, \quad (6.39)$$

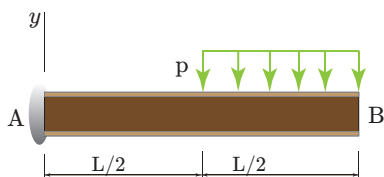
$$\sum M = 0 \rightarrow M_A = \frac{8aF}{7}. \quad (6.40)$$

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

9. Feladat

Az alábbi tartót megoszló erőrendszer terheli.

(a) Határozza meg a B keresztmetszet függőleges eltolódását y_B !



Megoldás

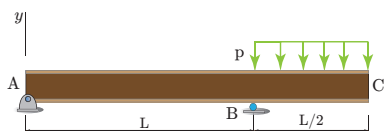
$$y_B = \frac{41 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot IE} \downarrow. \quad (6.41)$$

10. Feladat

Az alábbi tartót megoszló erőrendszer terheli.

(a) Határozza meg a C keresztmetszet függőleges eltolódását y_C !

(b) Határozza meg a C keresztmetszet elfordulását φ_C !



Megoldás

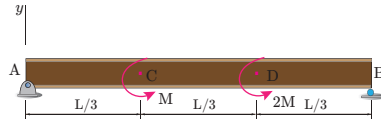
$$y_C = \frac{11 \cdot p \cdot L^4}{384 \cdot IE} \downarrow, \quad (6.42)$$

$$\varphi_C = \frac{p \cdot L^3}{16 \cdot IE} \curvearrowright. \quad (6.43)$$

11. Feladat

Az alábbi tartót koncentrált nyomatékok terhelnek.

(a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását φ_A !



Megoldás

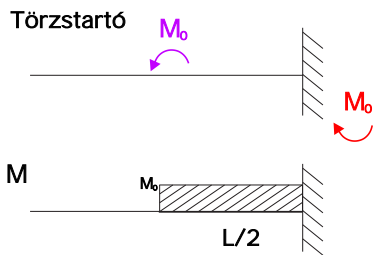
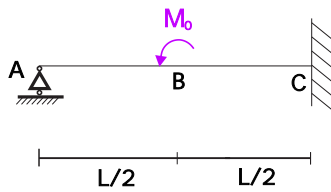
$$\varphi_A = \frac{M \cdot L}{6 \cdot IE} \approx . \quad (6.44)$$

12. Feladat

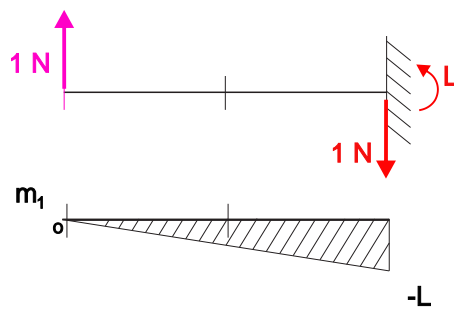
Az alábbi tartót koncentrált nyomaték terheli.

(a) Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit!

Megoldás



Első lépésben a törzstartó (az A támasz elvétele) nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a törzstartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás felszabadítása miatt az A pontba teszünk egy egységnyi erőt.

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS

A megoldandó egyenlet

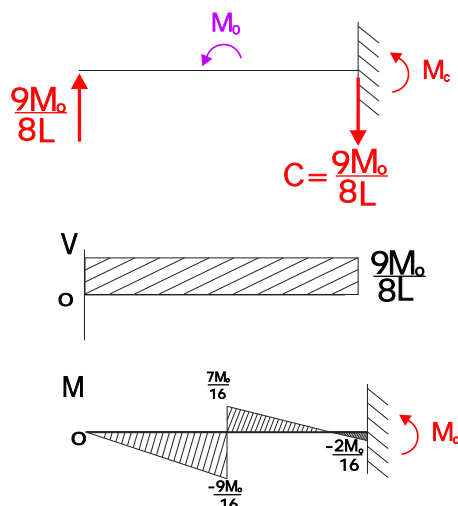
$$\delta_{11}A + \delta_{10} = 0 \rightarrow A = \frac{9M_0}{8L}. \quad (6.45)$$

Az egyensúlyi egyenletekből a kérdéses további reakciók

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C = -\frac{9M_0}{8L}, \quad (6.46)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_C = \frac{M_0}{8}. \quad (6.47)$$

A határozatlan tartó igénybevételi ábrái tehát



6.5. ábra. A határozatlan tartó igénybevételi ábrái

13. Feladat

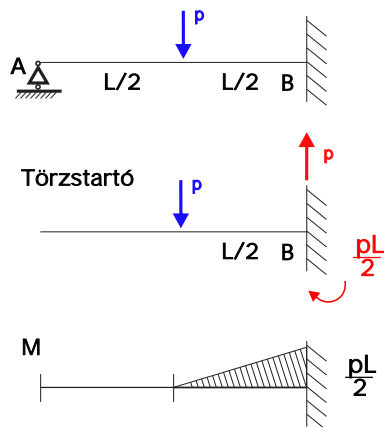
Az alábbi tartót koncentrált erő terheli.

(a) Rajzolja meg a tartó igénybevételi ábráit!

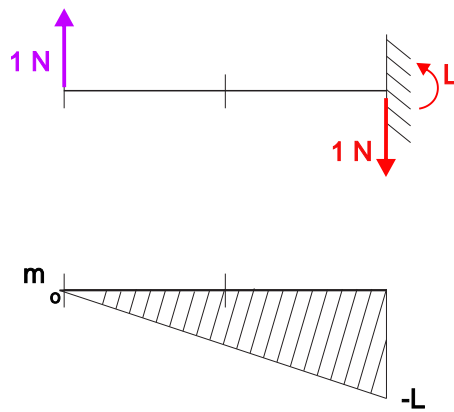
Megoldás

A megoldandó egyenlet

$$\delta_{11}A + \delta_{10} = 0 \rightarrow A = \frac{5p}{16}. \quad (6.48)$$



Első lépésben a törzstartó (az A támasz elvétele) nyomatéki ábráját kell megrajzolni az adott terhelés figyelembevételével.



Második lépésben a törzstartó nyomatéki ábráját kell megrajzolni az egységnyi terhelés figyelembevételével. A függőleges elmozdulás felszabadítása miatt az A pontba teszünk egy egységnyi erőt.

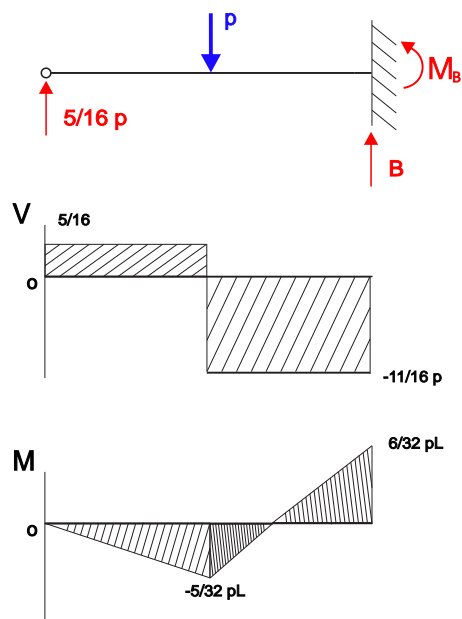
Az egyensúlyi egyenletekből a kérdéses további reakciók

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B = \frac{11p}{16}, \quad (6.49)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_B = \frac{3pL}{16}. \quad (6.50)$$

A határozatlan tartó igénybevételi ábrái tehát

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

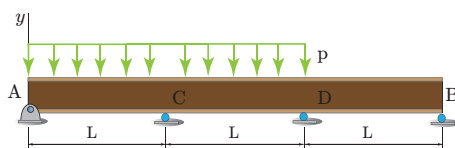


6.6. ábra. A határozatlan tartó igénybevételi ábrái

14. Feladat

A tartót megoszló erőrendszer terheli.

(a) Határozza meg a szerkezet nyomatéki ábráját!



6.7. ábra. Kétszeresen határozatlan szerkezet

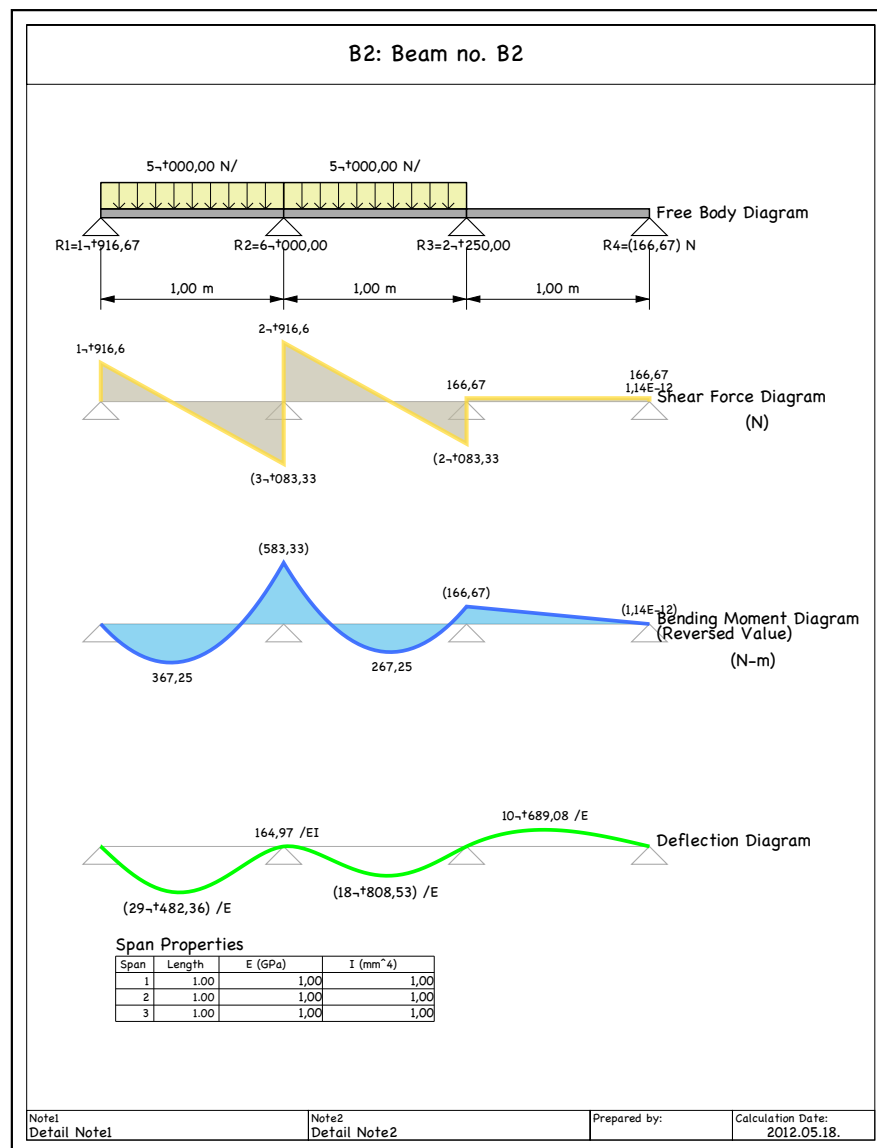
Megoldás

A szerkezetet tegyük határozottá a B és C támaszok elvételével. Mivel a tartó kétszeresen határozatlan ezért a megoldandó egyenletrendszer a következő

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0, \quad (6.51)$$

$$\delta_{20} + \delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0, \quad (6.52)$$

ahol $X_1 = B$, $X_2 = C$, $\delta_{10} = \frac{1}{EI} \int M m_1 ds$, $\delta_{20} = \frac{1}{EI} \int M m_2 ds$, $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int m_1^2 ds$, $\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int m_2^2 ds$, M a törzstartó nyomatéki igénybevétele az adott terhelés esetén, m_1 a törzstartó nyomatéki igénybevétele ha a B támasz helyén működik az egységnyi erő és m_2 a törzstartó nyomatéki igénybevétele ha a C támasz helyén működik az egységnyi erő. A feladat az A-Beam HD alkal-



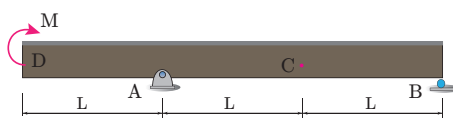
6.8. ábra. Kétszeresen határozatlan szerkezet igénybevételei ábrái és a lehajlás
mazással készült. Letölthető innen.

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS

15. Feladat

Az alábbi tartót koncentrált nyomaték terheli. Adott $M= 2 \text{ kNm}$, $I=2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $l= 1 \text{ m}$, $E= 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

- (a) Határozza meg a C keresztmetszet függőleges eltolódását y_C !
- (b) Határozza meg a C keresztmetszet elfordulását φ_C !
- (c) Határozza meg a D keresztmetszet függőleges eltolódását y_D !
- (d) Határozza meg a D keresztmetszet elfordulását φ_D !



6.9. ábra. Tartó

Megoldás

$$y_C = \frac{5}{4} \text{ mm } \downarrow, \quad (6.53)$$

$$\varphi_C = \frac{1}{2400} \text{ rad } \curvearrowright, \quad (6.54)$$

$$y_D = \frac{35}{6} \text{ mm } \uparrow, \quad (6.55)$$

$$\varphi_D = \frac{1}{120} \text{ rad } \curvearrowright. \quad (6.56)$$

16. Feladat

Az azonos L hosszúságú részekből álló törtengelyű tartót koncentrált erő terheli.

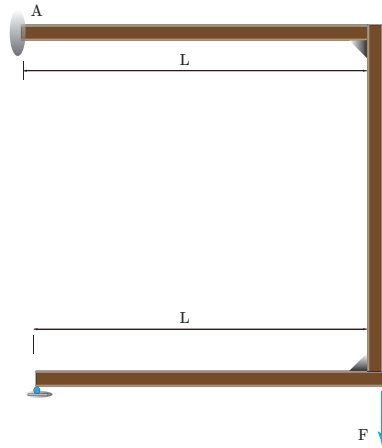
- (a) Határozza meg a tartó nyomatéki ábráját!

Megoldás

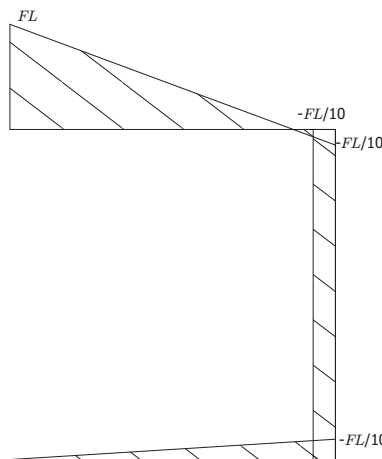
A tartó kérdéses nyomatéki ábrája

17. Feladat

A síkgörbe rudat koncentrált erő terheli.

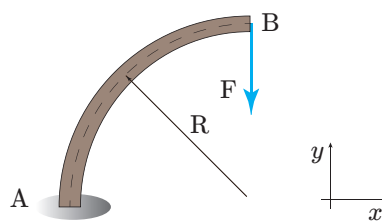


6.10. ábra. Határozatlan szerkezet



6.11. ábra. Nyomatéki ábra

- (a) Határozza meg a B pont függőleges eltolódását y_B !
- (b) Határozza meg a B pont vízszintes eltolódását x_B !

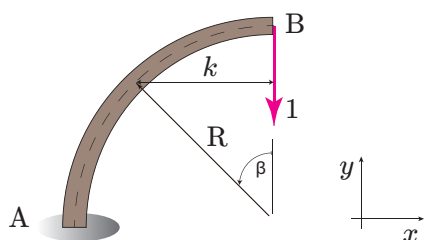


6.12. ábra. Síkgörbe tartó

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS

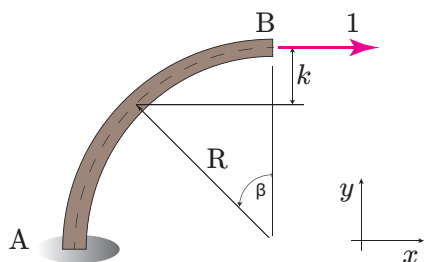
Megoldás

A függőleges elmozdulás számításához a kérdéses pontba működtetünk egy függőleges egységnyi erőt. Az elmozdulást csak a hajlító igénybevételből számoljuk. A vízszintes elmozdulás számításához a kérdéses pontba működtetünk



Az elmozdulás $y_B =$
 $\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M m_2 R d\beta = \frac{FR^3 \pi}{4EI}$, ahol
 $M(\beta) = -FR \sin \beta$, $m_2(\beta) =$
 $-R \sin \beta$.

egy vízszintes egységnyi erőt. Az elmozdulást csak a hajlító igénybevételből számoljuk.



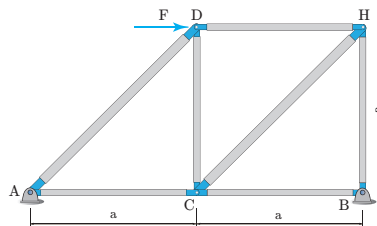
Az elmozdulás $x_B =$
 $\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M m_1 R d\beta = \frac{FR^3}{2EI}$, ahol
 $M(\beta) = -FR \sin \beta$, $m_1(\beta) =$
 $-R(1 - \cos \beta)$.

18. Feladat

A rácsos szerkezet minden eleme azonos keresztmetszetű (A), azonos rugalmassági modulusú E .

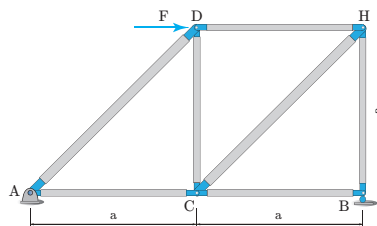
- (a) Határozza meg a reakcióerőket!
- (b) Határozza meg a rúderőket!

A feladat határozatlan, a külső erőkre (reakciókra) nézve. Mind a két támaszban ébredhet vízszintes és függőleges erőkomponens is. A felírható egyensúlyi egyenletek száma azonban csak három, a négy ismeretlennel szemben.



6.13. ábra. Külsőleg határozatlan rácsos tartó.

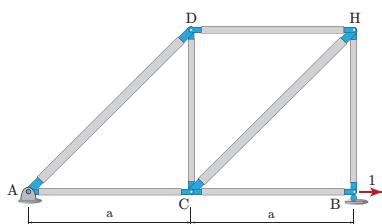
A szerkezetet határozottá tehetjük, ha az egyik támaszt görgős támasszá alakítjuk. Ekkor a szerkezet már határozott és kiszámíthatóak a reakcióerők és a rúderők.



6.14. ábra. A határozottá tett szerkezet.

Ezután, mivel a B támasz vízszintes elmozdulását tettük lehetővé, ezért abba a pontba az adott irányba egységnyi erőt teszünk. Ekkor is kiszámítjuk a reakcióerőket és a rúderőket.

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS



6.15. ábra. Egységnyi erő alkalmazása.

A kompatibilitási egyenlet pedig

$$\delta_{10} + B_x \delta_{11} = 0, \quad (6.57)$$

$$\text{ahol } \delta_{10} = \int \frac{N_i n_1}{AE} ds = \sum_{i=1}^n \frac{N_i n_i l_i}{AE}, \quad \delta_{11} = \int \frac{n_i^2}{AE} ds = \sum_{i=1}^n \frac{n_i^2 l_i}{AE}.$$

A reakcióerők pedig

$$B_x = \frac{F}{4} \leftarrow, B_y = \frac{F}{2} \uparrow, A_y = \frac{F}{2} \downarrow, A_x = \frac{3F}{4} \leftarrow.$$

19. Feladat

A rácsos szerkezet minden eleme azonos keresztmetszetű (A), azonos rugalmassági modulusú E . Adott $F=1$ kN, $a=1$ m.

(a) Határozza meg a rúderőket!

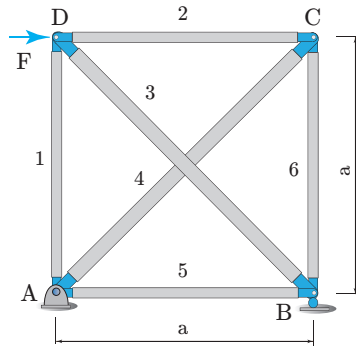
A feladat határozatlan, a belső erőkre nézve. Az A támaszban ébredhet vízszintes és függőleges erőkomponens is, a B -ben csak függőleges. A felírható egyensúlyi egyenletek száma három, így statikailag határozott. A belső erőkre nézve azonban határozatlan, minden csomópontban három rúd találkozik.

A szerkezetet határozottá tehetjük, ha az egyik rudat átvágjuk. Így kiszámolhatóak a rúderők, N_i -k.

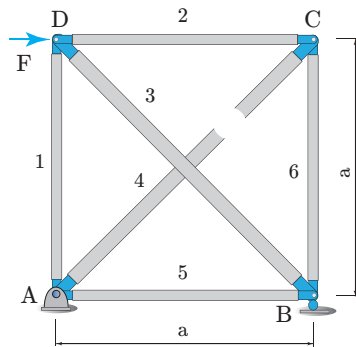
Következő lépésben az átvágott tartó helyén egységnyi erőrendszert működtetünk, majd így is kiszámoljuk a rúderőket, n_i -k.

A kompatibilitási egyenlet pedig

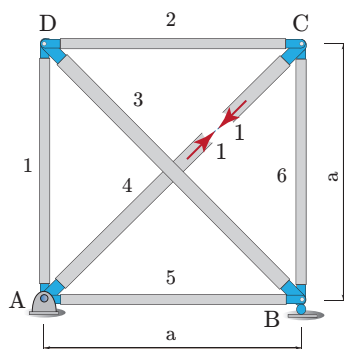
$$\delta_{10} + S_4 \delta_{11} = 0, \quad (6.58)$$



6.16. ábra. Belsőleg határozatlan rácsos tartó



6.17. ábra. Törzstartó



6.18. ábra. Határozottá tett rácsos tartó, egységnyi erővel

ahol S_4 az átvágott rúdban ébredő erő, $\delta_{10} = \int \frac{N_i n_1}{AE} ds = \sum_{i=1}^n \frac{N_i n_i l_i}{AE}$, $\delta_{11} =$

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS

$$\int \frac{n_i^2}{AE} ds = \sum_{i=1}^n \frac{n_i^2 l_i}{AE}. \text{ A megoldás pedig}$$

$$S_1 = 0.5\text{kN}, S_2 = -0.5\text{kN}, S_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\text{kN}, S_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{kN}, S_5 = 0.5\text{kN}, S_6 = -0.5\text{kN}.$$

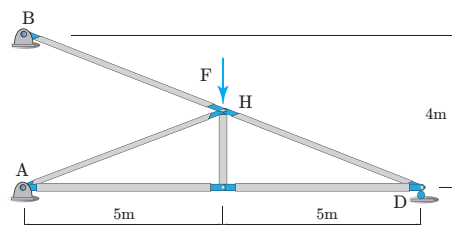
20. Feladat

A rácsos szerkezet minden eleme azonos keresztmetszetű (A), azonos rugalmassági modulusú E. Adott $F=40\text{ kN}$.

(a) Határozza meg a reakcióerőket!

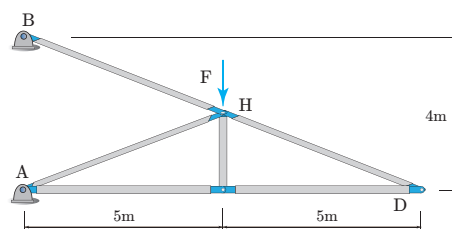
(b) Határozza meg a rúderőket!

A feladat határozatlan, a külső erőkre nézve. Az A támaszban a reakcióerő iránya ismert, AH hatásvonalú. A B támaszban vízszintes és függőleges komponens is ébredhet és a D támaszban egy függőleges komponens az ismeretlen. A felírható egyensúlyi egyenletek száma azonban csak három, a négy ismeretlennel szemben.

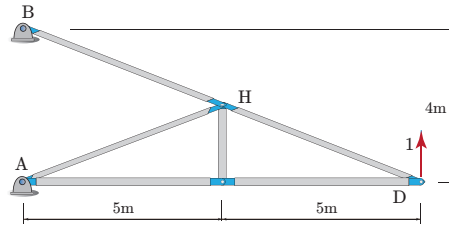


6.19. ábra. Külsőleg határozatlan rácsos tartó

Határozottá a D támasz elvételével tehetjük, így kiszámíthatóak a rúderők.



6.20. ábra. Külsőleg határozatlan rácsos tartó, határozottá téve



6.21. ábra. Egységnyi erő

A következő lépésben a D támaszba egységnyi erőt helyezünk függőleges irányban. Ezzel is kiszámoljuk a rúderőket.

Majd a kompatibilitási egyenlet pedig

$$\delta_{10} + D\delta_{11} = 0, \quad (6.59)$$

$$\text{ahol } \delta_{10} = \int \frac{N_i n_1}{AE} ds = \sum_{i=1}^n \frac{N_i n_1 l_i}{AE}, \quad \delta_{11} = \int \frac{n_1^2}{AE} ds = \sum_{i=1}^n \frac{n_1^2 l_i}{AE}.$$

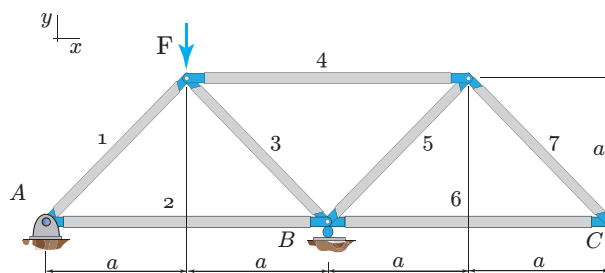
A reakcióerők így

$$A_x = -B_x = 36.15\text{kN} \leftarrow, A_y = 14.46\text{kN} \uparrow, B_y = 20\text{kN} \uparrow, D = 5.54\text{kN} \uparrow.$$

21. Feladat

Az ábrán látható rácsos tartó állandó AE merevségű rudakból áll.

(a) Határozza meg a C pont függőleges elmozdulását, y_C -t!



6.22. ábra. Rácsos tartó.

A keresett érték

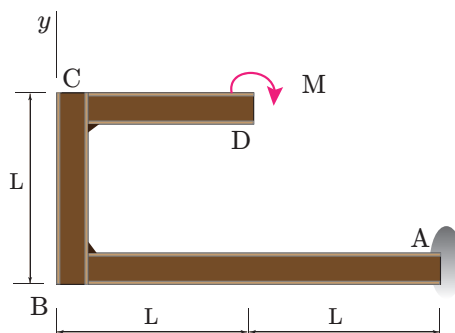
$$y_C = \frac{aF}{AE} \downarrow. \quad (6.60)$$

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

22. Feladat

Az ábrán látható tartó állandó IE merevségű.

- (a) Határozza meg a D keresztmetszet elfordulását, φ_D -t!
- (b) Határozza meg a B keresztmetszet függőleges elmozdulását, y_B -t!



6.23. ábra. Befogott tartó

A keresett értékek

$$\varphi_D = \frac{4ML}{IE} \curvearrowright, \quad (6.61)$$

$$y_B = \frac{2ML^2}{IE} \uparrow. \quad (6.62)$$

23. Feladat

Az ábrán látható tartó állandó IE merevségű.

- (a) Határozza meg a D keresztmetszet elfordulását, φ_D -t!
- (b) Határozza meg a B keresztmetszet függőleges elmozdulását, y_B -t!

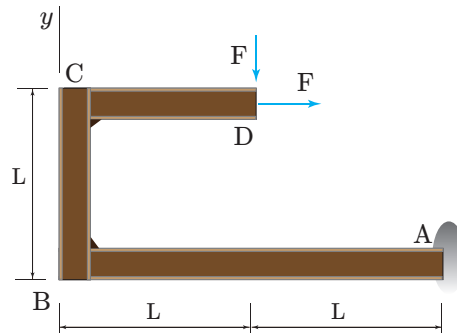
A keresett értékek

$$\varphi_D = \frac{4FL^2}{IE} \curvearrowright, \quad (6.63)$$

$$y_B = \frac{4FL^3}{3IE} \uparrow. \quad (6.64)$$

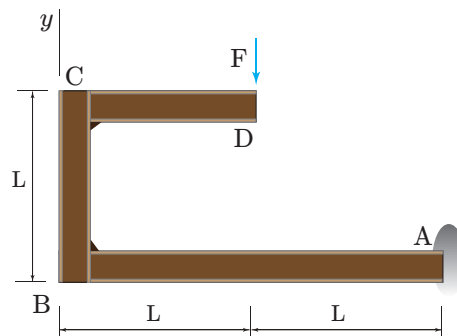
24. Feladat

Az ábrán látható tartó állandó IE merevségű.



6.24. ábra. Befogott tartó

- (a) Határozza meg a D keresztmetszet elfordulását, φ_D -t!
 (b) Határozza meg a B keresztmetszet függőleges elmozdulását, y_B -t!



6.25. ábra. Befogott tartó

A keresett értékek

$$\varphi_D = \frac{3FL^2}{2IE} \curvearrowright, \quad (6.65)$$

$$y_B = \frac{2FL^3}{3IE} \downarrow. \quad (6.66)$$

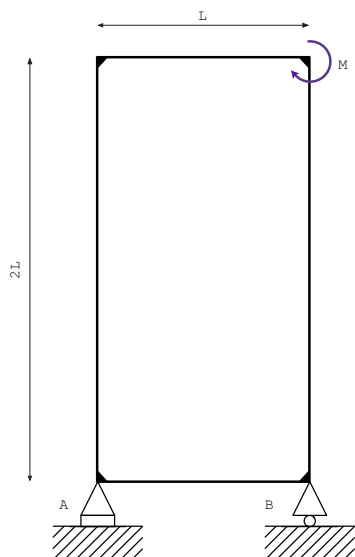
25. Feladat

Az ábrán látható keret állandó IE merevségű.

- (a) Határozza meg a keret nyomatéki ábráját!

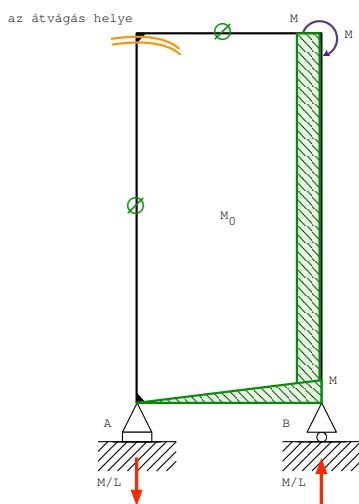
A reakciók a támaszokban kiszámolhatóak, a koncentrált nyomatékkal egy $\frac{M}{L}$ erőpár tart egyensúlyt. Az igénybevételek azonban nem számolhatóak,

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS



6.26. ábra. Zárt keret

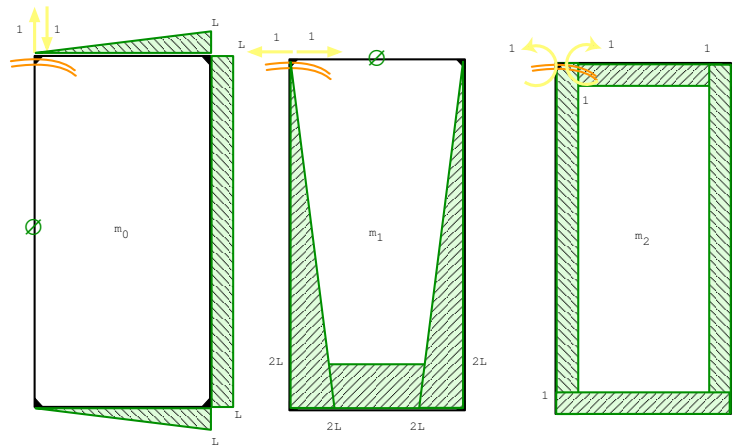
hiszen a szerkezet körben zárt. Ezért a törzstartó felvételéhez az egyik keresztmetszetben ketté vágjuk. Következő lépésben az átvágás kereszt-



6.27. ábra. A törzstartó nyomatéki ábrája

metszetében működtetjük az egységnyi normál, nyíró és hajlító igénybevételeket. Ezek láthatóak a 25 ábrán. Mivel a tartó már határozott, ezért a három

esetben megrajzolhatóak a hajlítói igénybevételi ábrák, rendre m_0 , m_1 , m_2 . A megoldandó feladat pedig az



6.28. ábra. Egységnyi terhelések a törzstartón

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (6.67)$$

alakban felírható egyenletrendszer megoldása, ahol \mathbf{b} a terheléstényezőket tartalmazó vektor, míg \mathbf{A} az egységtényezőket tartalmazó mátrix. Részletesen így írható

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix}. \quad (6.68)$$

Az egyes elemek a következőképpen számolhatóak

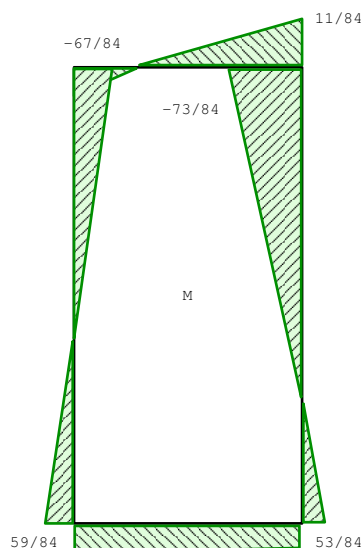
$$\delta_{ij} = \int_{(s)} \frac{m_i m_j}{IE} ds, \quad \delta_{i0} = \int_{(s)} \frac{m_i M_0}{IE} ds. \quad (6.69)$$

Ezekkel a keret nyomatéki ábrája a

$$M = M_0 + \sum_{i=0}^2 X_i m_i \quad (6.70)$$

egyenlet alapján számolható. Enek eredménye látható a 25 ábrán.

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS



6.29. ábra. A végleges nyomatéki ábra

Az egyes tényezők részletezve tehát

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{8}{3}l^3, \\ \delta_{12} &= -3l^3, \\ \delta_{13} &= -3l^2, \\ \delta_{22} &= \frac{28}{3}l^3, \\ \delta_{23} &= 6l^2, \\ \delta_{33} &= 6l, \\ \delta_{10} &= -\frac{7}{3}Ml^2, \\ \delta_{20} &= 5Ml^2, \\ \delta_{30} &= \frac{5}{2}Ml.\end{aligned}$$

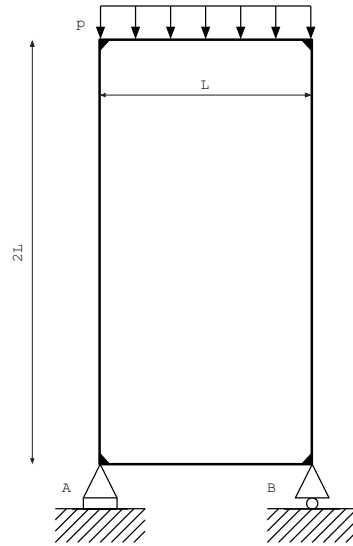
Ennek eredménye

$$X_0 = \frac{13M}{14l}, X_1 = -\frac{3M}{4l}, X_2 = \frac{67M}{84}.$$

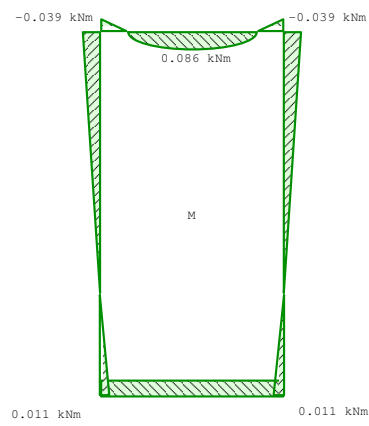
26. Feladat

Az ábrán látható keret állandó IE merevségű. Adott $L=1$ m, $p=1$ kN/m.

(a) Határozza meg a keret nyomatéki ábráját!



6.30. ábra. Zárt keret.



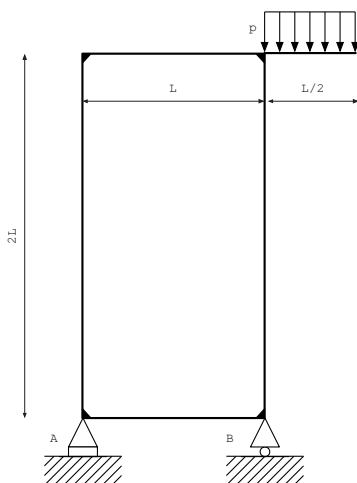
6.31. ábra. Nyomatéki ábra.

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

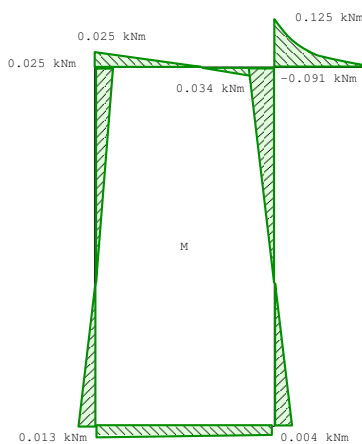
27. Feladat

Az ábrán látható keret állandó IE merevségű. Adott $L=1$ m, $p=1$ kN/m.

(a) Határozza meg a keret nyomatéki ábráját!



6.32. ábra. Zárt keret.

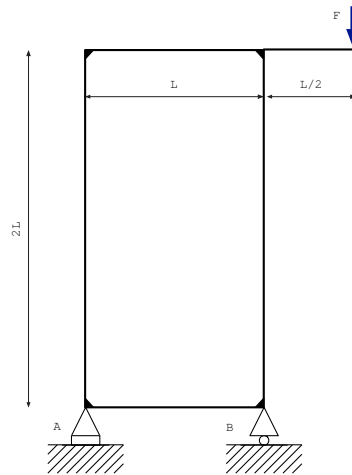


6.33. ábra. Nyomatéki ábra.

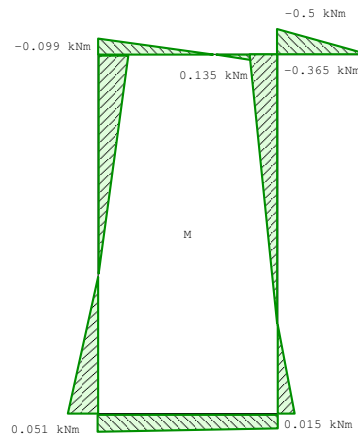
28. Feladat

Az ábrán látható keret állandó IE merevségű. Adott $L=1$ m, $F=1$ kN.

(a) Határozza meg a keret nyomatéki ábráját!



6.34. ábra. Zárt keret.



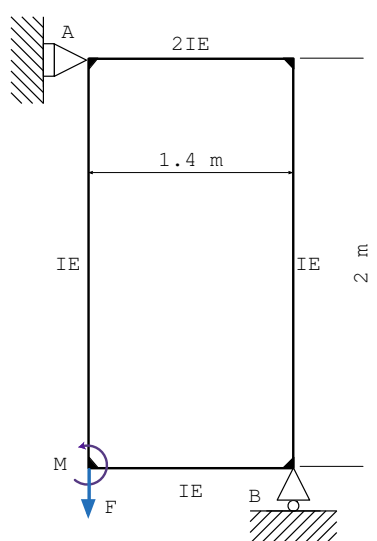
6.35. ábra. Zárt keret.

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS

29. Feladat

Az ábrán látható keretet koncentrált erő és nyomaték terheli. Az egyes részeinek merevsége és a méretek az ábrán adottak.

(a) Határozza meg a keret nyomatéki ábráját!



6.36. ábra. Zárt keret.

A megoldandó egyenletrendszer az alábbi alakban írható

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

A mátrix elemeinek száma jelentősen csökkenthető, amennyiben az egységnyi erőrendszert a megfelelő helyre vesszük fel. Ez a pont a sigma pont. Ebben az esetben a mátrix diagonál lesz, vagyis

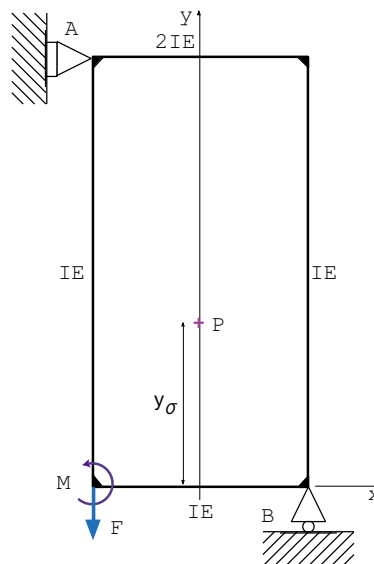
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

A sigma pont helyét megkapjuk, ha kiszámoljuk az alábbi mennyiségeket

$$x_{\sigma} = \frac{\int_s \frac{x ds}{IE}}{\int_s \frac{ds}{IE}}, \quad (6.73)$$

$$y_{\sigma} = \frac{\int_s \frac{y ds}{IE}}{\int_s \frac{ds}{IE}}. \quad (6.74)$$

A példában kihasználva a szimmetriát csak y irányban szükséges meghatározni a pont helyét. A helye pedig



6.37. ábra. Zárt keret sigma pontja.

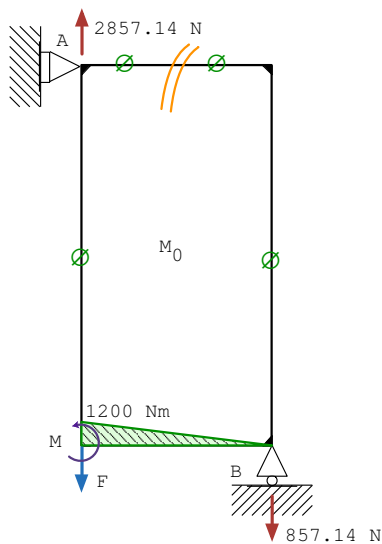
$$\int_s \frac{y ds}{IE} = 2 \frac{1}{IE} (4 \times 1 + 2) + \frac{1}{2IE} (6 \times 2) = \frac{5.4}{IE}, \quad (6.75)$$

$$\int_s \frac{ds}{IE} = \frac{1}{IE} (2 + 1.4 + 2) + \frac{1}{2IE} 1.4 = \frac{6.1}{IE}. \quad (6.76)$$

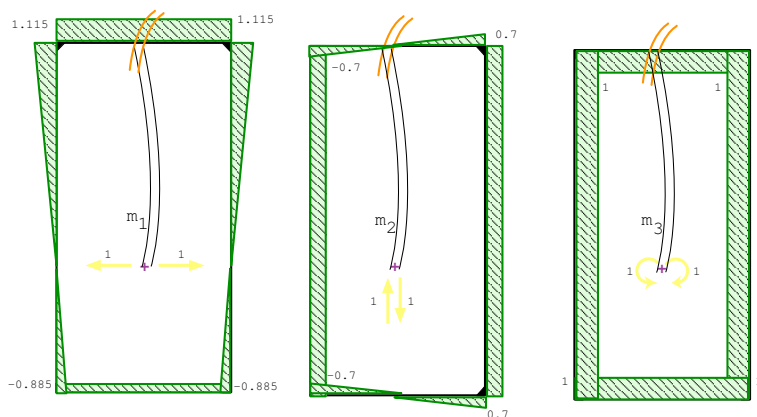
Ezekkel a koordináta

$$y_{\sigma} = \frac{5.4}{6.1} = 0.885 \text{ m}. \quad (6.77)$$

6. DEFOMÁCIÓSZÁMÍTÁS



6.38. ábra. Zárt keret nyomatéki ábrája.



6.39. ábra. Zárt keret nyomatéki ábrái.

A törzstartó kialakítása és a nyomatéki ábra látható a ?? ábrán.

Az egyes tényezők rendre

$$\delta_{10} = \frac{1}{IE} \frac{1.4}{6} [1200 \times 0.885 + 4 \times 600 \times 0.885] = \frac{743.4}{IE}, \quad (6.78)$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{IE} \frac{1.4}{6} [1200 \times 0.7] = \frac{196}{IE}, \quad (6.79)$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{IE} \frac{1.4}{6} [1200 \times 1 + 4 \times 600 \times 1] = \frac{840}{IE}. \quad (6.80)$$

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{IE} \frac{2}{6} \left[1.115^2 + 4 \times 0.115^2 + 0.885^2 \right] + \frac{1}{IE} \frac{1.4}{6} 6 \times 0.885^2 + \quad (6.81)$$

$$\frac{1}{2IE} \frac{1.4}{6} 6 \times 1.115^2 = \frac{3.353}{IE},$$

$$\delta_{22} = 2 \frac{1}{IE} \frac{2}{6} 6 \times 0.7^2 + \frac{1}{IE} \frac{1.4}{6} 2 \times 0.7^2 + \quad (6.82)$$

$$\frac{1}{2IE} \frac{1.4}{6} 2 \times 0.7^2 = \frac{2.303}{IE},$$

$$\delta_{33} = 2 \frac{1}{IE} \frac{2}{6} 6 \times 1 + \frac{1}{IE} \frac{1.4}{6} 6 \times 1 + \frac{1}{2IE} \frac{1.4}{6} 6 \times 1 = \frac{6.1}{IE}. \quad (6.83)$$

A megoldandó egyenletrendszer pedig

$$\begin{bmatrix} 3.353 & 0 & 0 \\ 0 & 2.303 & 0 \\ 0 & 0 & 6.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 743.4 \\ 196 \\ 840 \end{bmatrix}. \quad (6.84)$$

Ennek a megoldása

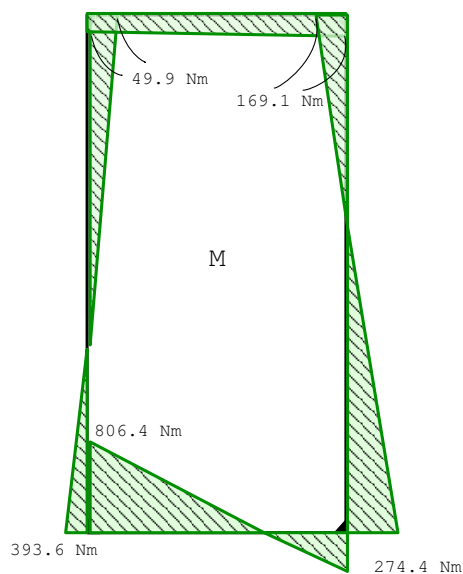
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 221.712 \\ 85.1064 \\ 137.705 \end{bmatrix}. \quad (6.85)$$

A zárt keret nyomatéki ábrája pedig számolható

$$M = M_0 + m_1 \times X_1 + m_2 \times X_2 + m_3 \times X_3. \quad (6.86)$$

Ez alapján a nyomatéki ábra

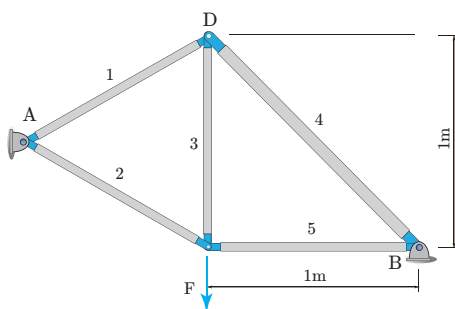
6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS



6.40. ábra. A teljes nyomatéki ábra.

30. Feladat

Az alábbi rácsos szerkezet ACD része szabályos háromszöget alkot, 1 m-es élhosszal. Minden rúd azonos AE merevségű, $F=1$ kN.



6.41. ábra. Rácsos szerkezet.

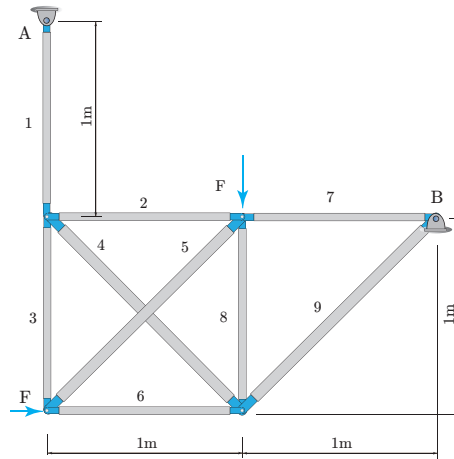
(a) Határozza meg a rúderőket!

A rúderők rendre

$$S_1 = -0.528 \text{ kN}, S_2 = 0.557 \text{ kN}, S_3 = 0.719 \text{ kN}, S_4 = -0.645 \text{ kN}, S_5 = 0.477 \text{ kN}.$$

31. Feladat

Az alábbi rácsos szerkezet minden rúdja azonos AE merevségű, $F=1$ kN.



6.42. ábra. Rácsos szerkezet

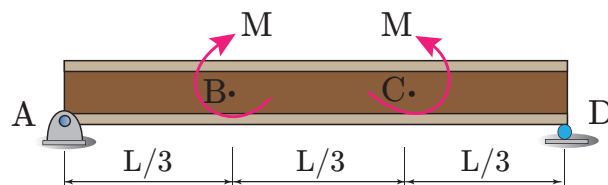
(a) Határozza meg a rúderőket!

A rúderők rendre $S_1 = 1$ kN, $S_2 = -0.396$ kN, $S_3 = 0.604$ kN, $S_4 = 0.561$ kN, $S_5 = -0.854$ kN, $S_6 = -0.396$ kN, $S_7 = -1$ kN, $S_8 = -0.396$ kN, $S_9 = 0$ kN.

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

32. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű.



6.43. ábra. Tartó elmozdulása.

- (a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását, φ_A -t!
 (b) Határozza meg a B keresztmetszet függőleges elmozdulását, y_B -t!

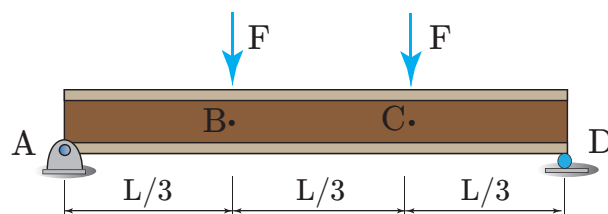
A keresett értékek

$$\varphi_A = \frac{ML}{6IE} \curvearrowright, \quad (6.87)$$

$$y_B = \frac{ML^2}{18IE} \downarrow. \quad (6.88)$$

33. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű.



6.44. ábra. Tartó elmozdulása.

- (a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását, φ_A -t!
 (b) Határozza meg a legnagyobb függőleges elmozdulást, y -t!

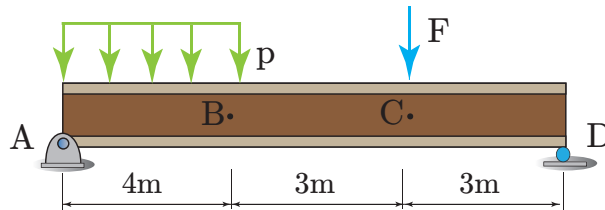
A keresett értékek

$$\varphi_A = \frac{FL^2}{9IE} \curvearrowright, \quad (6.89)$$

$$y(L/2) = \frac{23FL^3}{648IE} \downarrow. \quad (6.90)$$

34. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű. Adott $p = 3 \text{ kN/m}$, $F = 50 \text{ kN}$.



6.45. ábra. Tartó elmozdulása.

- (a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását, φ_A -t!
 (b) Határozza meg a C keresztmetszet függőleges elmozdulást, y_C -t!

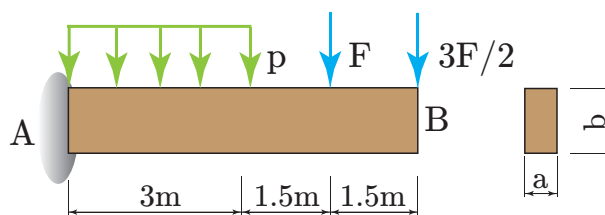
A keresett értékek

$$\varphi_A = \frac{279}{IE} \curvearrowright \quad (6.91)$$

$$y_C = \frac{835}{IE} \downarrow \quad (6.92)$$

35. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű. Adott $p = 2 \text{ kN/m}$, $F = 4 \text{ kN}$, $a = 200 \text{ mm}$, $b = 400 \text{ mm}$, $E = 12 \text{ GPa}$.



6.46. ábra. Tartó elmozdulása.

- (a) Határozza meg a B keresztmetszet elfordulását, φ_B -t!
 (b) Határozza meg a B keresztmetszet függőleges elmozdulást, y_B -t!

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

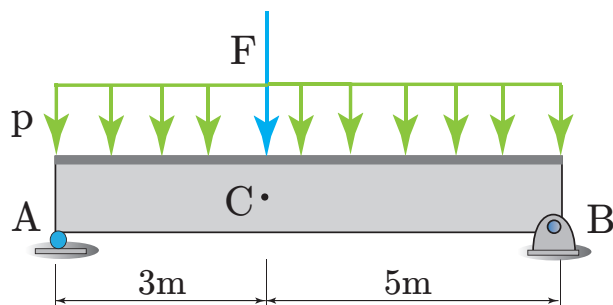
A keresett értékek

$$\varphi_B = 0.705^\circ \curvearrowright, \quad (6.93)$$

$$y_B = 51.7 \text{ mm} \downarrow. \quad (6.94)$$

36. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű. Adott $p = 12 \text{ kN/m}$, $F = 30 \text{ kN}$.



6.47. ábra. Tartó elmozdulása.

- (a) Határozza meg az A és B keresztmetszet elfordulását, φ_A , φ_B -t!
- (b) Határozza meg a C keresztmetszet függőleges elmozdulást, y_C -t!

A keresett értékek

$$\varphi_A = \frac{378}{IE} \curvearrowright, \quad (6.95)$$

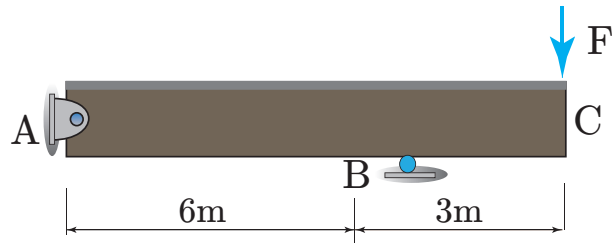
$$\varphi_B = \frac{359}{IE} \curvearrowright, \quad (6.96)$$

$$y_C = \frac{874}{IE} \downarrow. \quad (6.97)$$

37. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű. Adott $F = 10 \text{ kN}$.

- (a) Határozza meg a C keresztmetszet elfordulását, φ_C -t!
- (b) Határozza meg a C keresztmetszet függőleges elmozdulást, y_C -t!



6.48. ábra. Tartó elmozdulása.

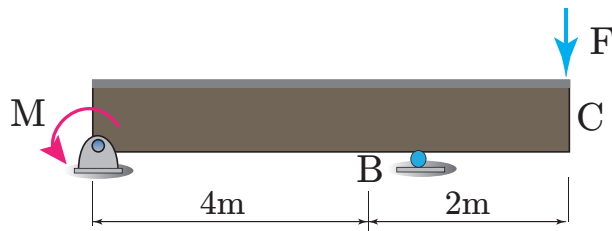
A keresett értékek

$$\varphi_C = \frac{105}{IE} \curvearrowright, \quad (6.98)$$

$$y_C = \frac{270}{IE} \downarrow. \quad (6.99)$$

38. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű. Adott $F=30$ kN, $M=30$ kNm, $I=45.5 \cdot 10^6$ mm⁴, $E=200$ GPa.



6.49. ábra. Tartó elmozdulása.

(a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását, φ_A -t!

(b) Határozza meg a C keresztmetszet elmozdulását, y_C -t!

A keresett értékek

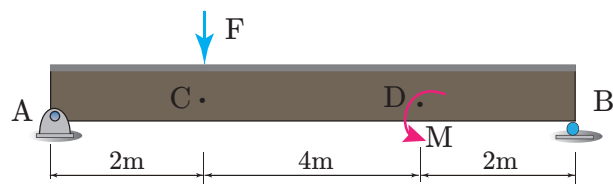
$$\varphi_A = 0.00879 \text{ rad } \curvearrowleft, \quad (6.100)$$

$$y_C = 30.8 \text{ mm}. \quad (6.101)$$

39. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű. Adott $M=aF$.

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS



6.50. ábra. Tartó elmozdulása.

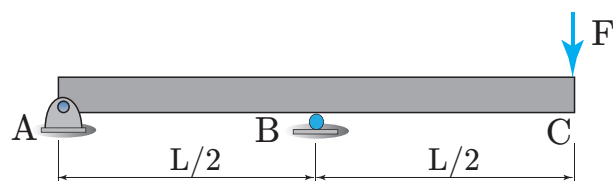
(a) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását, φ_A -t!

A keresett értékek

$$\varphi_A = \frac{17a^2F}{12IE} \curvearrowright. \quad (6.102)$$

40. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó állandó merevségű.



6.51. ábra. Tartó elmozdulása.

(a) Határozza meg a C keresztmetszet elmozdulását, y_C -t!

(b) Határozza meg az A keresztmetszet elfordulását, φ_A -t!

(c) Határozza meg a B keresztmetszet elfordulását, φ_B -t!

A keresett értékek

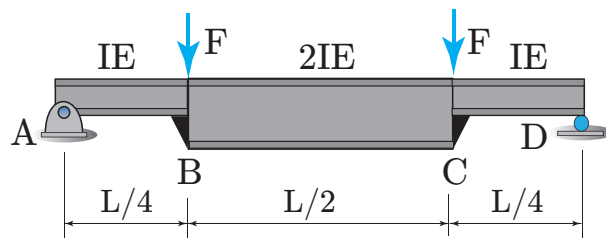
$$y_C = \frac{FL^3}{12IE}, \quad (6.103)$$

$$\varphi_A = \frac{L^2F}{24IE} \curvearrowright, \quad (6.104)$$

$$\varphi_B = \frac{L^2F}{12IE} \curvearrowright. \quad (6.105)$$

41. Feladat

Az alábbi kéttámaszú tartó merevsége változó.



6.52. ábra. Tartó elmozdulása.

- (a) Határozza meg a C keresztmetszet elmozdulását, y_C -t!
 (b) Határozza meg a D keresztmetszet elfordulását, φ_D -t!

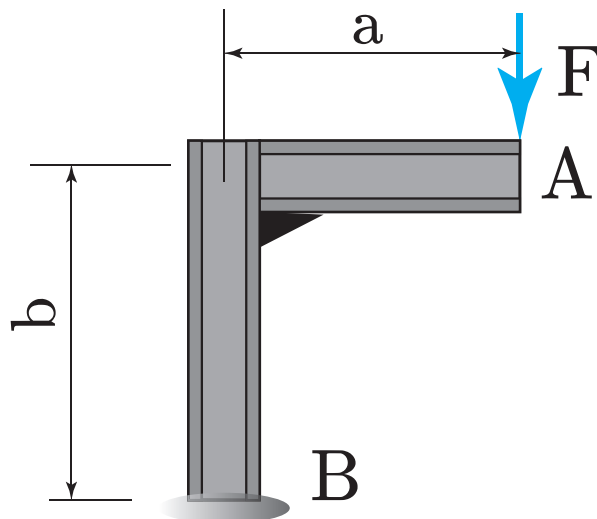
A keresett értékek

$$y_C = \frac{5FL^3}{384IE}, \quad (6.106)$$

$$\varphi_D = \frac{L^2F}{16IE} \curvearrowright. \quad (6.107)$$

42. Feladat

Az alábbi oszlop merevsége állandó. A normál igénybevétel hatása elhanyagolandó!



6.53. ábra. Tartó elmozdulása.

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

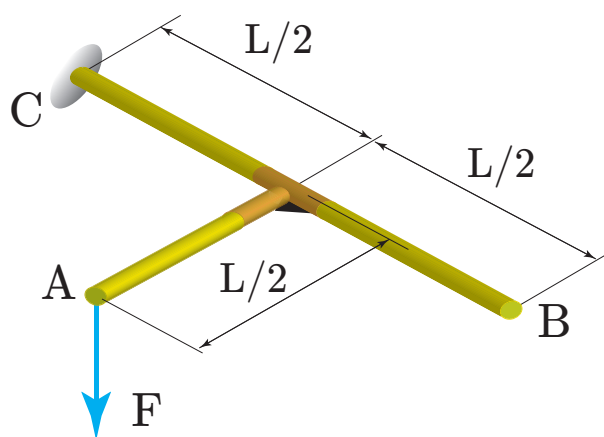
(a) Határozza meg az A keresztmetszet elmozdulását, y_A -t!

A keresett érték

$$y_A = \frac{Fa^2(3b+a)}{3IE} \downarrow. \quad (6.108)$$

43. Feladat

Az alábbi csőrendszer három azonos hosszú szakaszból áll. Hajlítómerevségük IE , csavarómerevségük I_pG .



6.54. ábra. Térbeli szerkezet.

(a) Határozza meg az A keresztmetszet elmozdulását, y_A -t!

A keresett érték

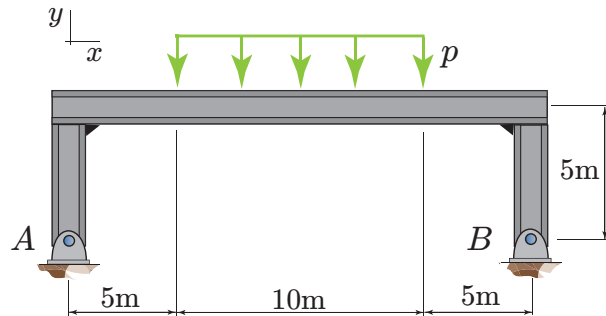
$$y_A = FL^3 \left(\frac{1}{12IE} + \frac{1}{8I_pG} \right) \downarrow. \quad (6.109)$$

44. Feladat

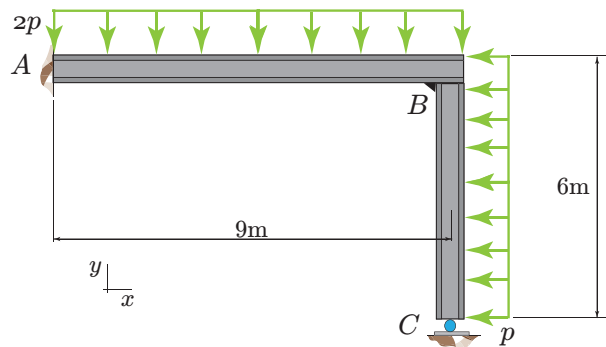
Az alábbi állandó IE merevségű tartó terhelése megoszló erőrendszer. Adott $p=40$ kN/m.

(a) Határozza meg az a reakcióerőket!

A keresett értékek $A_x = 157.1$ kN \rightarrow , $A_y = B_y = 200$ kN \uparrow , $B_x = 157.1$ kN \leftarrow .



6.55. ábra. Határozatlan szerkezet.



6.56. ábra. Határozatlan szerkezet.

45. Feladat

Az alábbi állandó IE merevségű tartó terhelése megoszló erőrendszer. Adott $p=4$ kN/m.

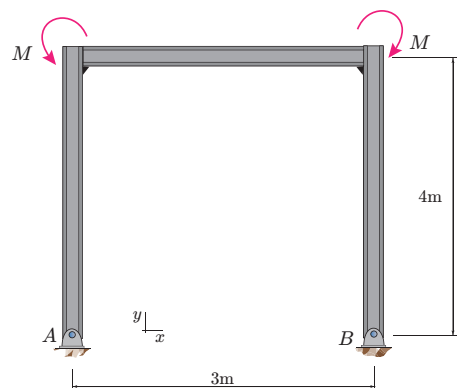
(a) Határozza meg az a reakcióerőket!

A keresett értékek $A_x = 24$ kN \rightarrow , $A_y = 33$ kN \uparrow , $C_y = 39$ kN \uparrow , $M_A = 45$ kNm \curvearrowright .

6. DEFORMÁCIÓSZÁMÍTÁS

46. Feladat

Az alábbi állandó IE merevségű tartó terhelése koncentrált nyomaték.
Adott $M=20$ kNm.



6.57. ábra. Határozatlan szerkezet.

(a) Határozza meg az a reakcióerőket!

A keresett értékek $A_x = 2.65$ kN \leftarrow , $A_y = 0$, $B_x = 2.65$ kN \rightarrow , $B_y = 0$.

7.1. Összefoglalás

Centrikusan nyomott rudak kihajlása esetén különböző peremfeltételek esetén számolható a stabilitásvesztés határán a kritikus nyomóerő. A rugalmas szál differenciálegyenletét felírva, figyelembe véve a 7.1 ábráról, hogy $M=Fy$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(y)}{IE} = -\frac{Fy}{IE}, \quad (7.1)$$

majd bevezetve a $p^2 = \frac{F}{IE}$ állandót

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0. \quad (7.2)$$

Ez közönséges, másodfokú lineáris differenciálegyenlet. Ennek általános megoldása

$$y(x) = A \sin(px) + B \cos(px). \quad (7.3)$$

A peremfeltételek $x = 0, y = 0$ és $x = L, y = 0$ figyelembevételével pedig a megoldás

$$B = 0, \quad (7.4)$$

$$A \sin(pL) = 0. \quad (7.5)$$

Ez akkor lehetséges ha $A = 0$ vagy $\sin(pL) = 0$. Az első esetben a rúd egyenes marad. A második esetben pedig teljesülni kell a

$$pL = n\pi \quad (7.6)$$

7. KIHAJLÁS

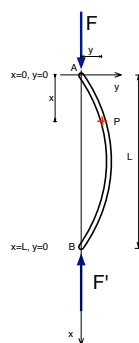
feltételnek. Ezt visszahelyettesítve és megoldva adódik, hogy

$$F = \frac{n^2 \pi^2 IE}{L^2}. \quad (7.7)$$

A legkisebb érték $n = 1$ esetén adódik, tehát

$$F_{krit.} = \frac{\pi^2 IE}{L^2}. \quad (7.8)$$

Ez a kritikus erő számításának *Euler* összefüggése. Kör és négyzet keresztmetszet esetén a másodrendű nyomaték minden súlyponti tengelyre ugyanaz. Vagyis minden tengely főirány. Egyéb keresztmetszetek esetén a kihajlás mindig a kisebbik főmásodrendű nyomatéki tengelyre merőlegesen következik be. Tehát a kritikus erő számításához I_2 szükséges. A kritikus feszültség nyomott



7.1. ábra. Mindkét végén csuklós megfogás esetén a görbült alak

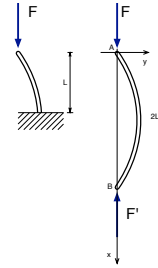
rudakról lévén szó

$$\sigma_{krit.} = \frac{F_{krit.}}{A}. \quad (7.9)$$

Abban az esetben ha a tartó egyik vége szabad a másik pedig mereven befogott a kihajlott alak egyezik a csuklós-csuklós megfogás esetén kapott alak felső felével. A kritikus erő tehát egyezni fog az előbb kapott értékkel, ha a hosszának most a kétszeresét vesszük figyelembe $L_{eff.} = 2L$

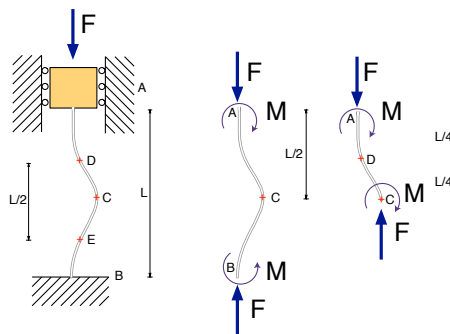
$$F_{krit.} = \frac{\pi^2 IE}{L_{eff.}^2}. \quad (7.10)$$

A következő eset amikor mindkét vége mereven befogott a tartó. A szimmet-



7.2. ábra. Egyik végén szabad másik végén mereven megfogott tartó

rikus megfogás és a középpontos terhelés miatt a nyíróerő a C pontban és a vízszintes reakció komponensek az A és B támaszokban nullák. Az AC szakaszon az A támaszból és a B támaszból is azonos a terhelés. Ezért az AC szakasznak a D középpontja körül szimmetrikusnak kell lennie. Ez a pont egyben inflexió pont is, itt a hajlítónyomaték nulla. Hasonló gondolatmenet alapján az E pontban is nulla a nyomaték. A csuklós-csuklós megfogás esetén volt nulla a nyomaték a rúd két végén, ezért a rúd DE szakasza egy csuklós-csuklós megfogású rúdként viselkedik. Ezért a mindkét végén mereven megfogott tartó effektív hossza $L_{eff.} = \frac{L}{2}$. A következő eset amikor merev befogás és csukló



7.3. ábra. Mindkét végén mereven befogott tartó

a rúd két megfogása. A szabad test ábra 7.1 alapján a csuklóban nyíróerő is ébred az F erőn kívül. Felírva a rugalmas szál differenciálegyenletét és figye-

7. KIHAJLÁS

lembe véve a nyomatékot

$$M = -Fy - Vx, \quad (7.11)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(y)}{IE} = -\frac{F}{IE}y - \frac{V}{IE}x. \quad (7.12)$$

Vezessük be a $p^2 = \frac{F}{IE}$ jelölést, így

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -\frac{V}{IE}x. \quad (7.13)$$

Ezzel egy inhomogén másodrendű differenciálegyenlethez jutottuk. Ennek megoldása adódik ha a homogén egyenlet egy általános megoldásához hozzá adunk egy partikuláris megoldást. A homogén általános megoldás már adott (7.3), így

$$y(x) = y_{h,g}(x) + y_p(x), \quad (7.14)$$

$$y(x) = -\frac{V}{p^2IE}x, \quad (7.15)$$

$$y(x) = -\frac{V}{F}x, \quad (7.16)$$

valamint

$$y(x) = A \sin(px) + B \cos(px) - \frac{V}{F}x. \quad (7.17)$$

Az ismeretlenek meghatározása a peremfeltételek alapján $x = 0, y = 0 \rightsquigarrow B = 0$ és $x = L, y = 0$

$$A \sin(pL) = \frac{V}{F}L \quad (7.18)$$

és

$$\frac{dy}{dx} = Ap \cos(px) - \frac{V}{F} \quad (7.19)$$

és $x = L, \frac{dy}{dx} = 0$

$$Ap \cos(pL) = \frac{V}{F}. \quad (7.20)$$

Felhasználva (7.18) és (7.20) egyenleteket

$$\tan(pL) = pL. \quad (7.21)$$

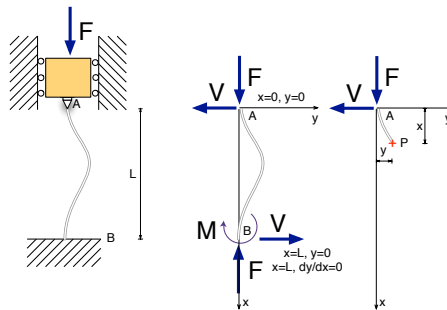
A legkisebb érték amire ez fennáll az $pL = 4.4934$. Mindezek figyelembevételével

$$F_{krit.} = \frac{20.19IE}{L^2}. \quad (7.22)$$

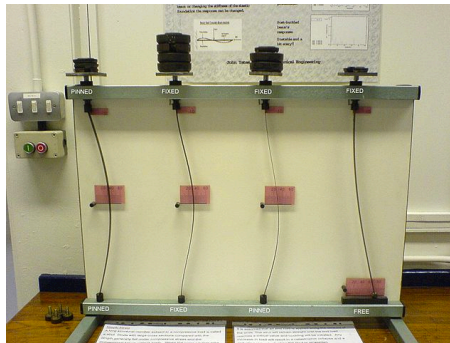
Rendezve az egyenlőséget

$$\frac{20.19IE}{L^2} = \frac{\pi^2 IE}{L_{eff.}^2} \leadsto L_{eff.} \approx 0.7L. \quad (7.23)$$

A 7.1 ábrán látható különböző peremfeltételek balról jobbra haladva: csukló-



7.4. ábra. Egyik végén csuklós másik végén mereven befogott tartó



7.5. ábra. Különböző megfogási esetek esetén a kihajlott alak

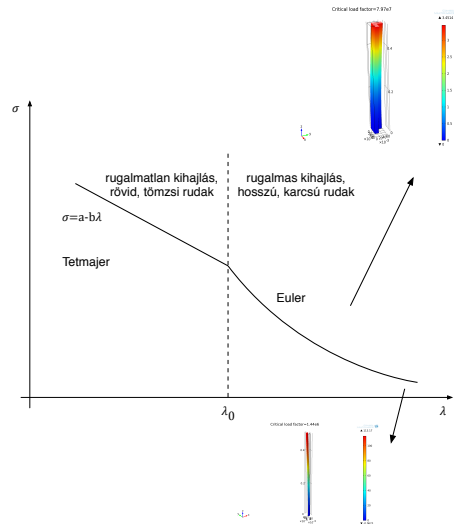
csukló, merev-merev, csukló-merev, szabad-merev. Az effektív hossz az egyes esetekben rendre $L_{eff.} = L, L_{eff.} = \frac{L}{2}, L_{eff.} = 0.7L, L_{eff.} = 2L$. Az inerciasugár és a karcsúság számítható a

$$i = \sqrt{\frac{I_2}{A}}, \quad (7.24)$$

$$\lambda = \frac{L_{eff.}}{i}. \quad (7.25)$$

7. KIHAJLÁS

képletekkel. A határkarcsúság alatt rendkívül sokféle modell készült, a tel-



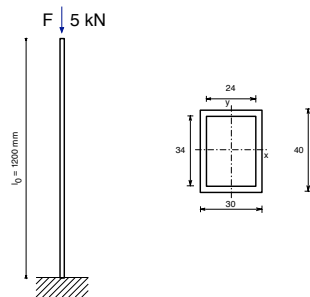
7.6. ábra. A kritikus feszültség a karcsúság függvényeként

jesség igénye nélkül Shanley, Tetmajer, Engesser, Johnson. Ezekről bővebben itt és most nem lesz szó.

1. Feladat

A prizmatikus, adott keresztmetszetű, alul befogott rudat az F nyomóerő centrikusan terheli. $\sigma_p = 200$ MPa, $E = 2.12 \cdot 10^5$ MPa, $\lambda_0 = 115$, $\sigma_{kr.} = 310 - 1.14 \cdot \lambda$, ha $\lambda < \lambda_0$.

(a) Határozza meg a rúd kihajlással szembeni biztonságát!



7.7. ábra. Nyomott tartó kihajlása.

Megoldás

A kihajlási hossz $l = 2 \cdot l_0 = 2400$ mm. A kisebbik másodrendű nyomaték

$$I_{min.} = I_y = 50832 \text{ mm}^4.$$

Inerciasugár és karcsúság

$$i = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 11.505, \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l}{i} = 208.6 > 115 \rightarrow \text{Euler.}$$

A kritikus erő tehát

$$F_{krit.} = \frac{\pi^2 \cdot I_y \cdot E}{l^2} = 18465.04 \text{ N.} \quad (7.26)$$

A biztonsági tényező pedig

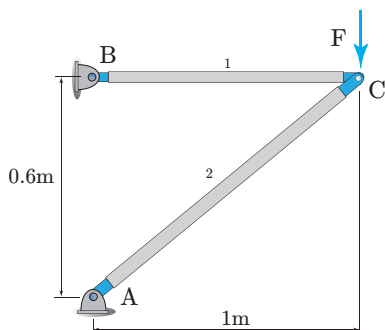
$$n = \frac{F_{krit.}}{F} = 3.69 > 1.$$

2. Feladat

A prizmatikus, adott keresztmetszetű rudakat koncentrált erő terheli. $A_1 = 3 \text{ cm}^2$, $A_2 = 7 \text{ cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $F = 6 \text{ kN}$, $\lambda_0 = 100$.

(a) Határozza meg a kettős rúd kihajlással szembeni biztonságát!

7. KIHAJLÁS



7.8. ábra. Nyomott tartó kihajlása.

Megoldás

A kettes rúdban ébredő erő

$$S_2 = \sqrt{6^2 + 10^2}.$$

A kihajlási hossz $l = 1 \cdot l_0 = \sqrt{1.36}$ m. A másodrendű nyomaték pedig

$$\frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = A_2 \rightarrow d_2^2 = \frac{4 \cdot A_2}{\pi},$$

$$I_2 = \frac{d_2^4 \cdot \pi}{64} = 3.9 \text{ cm}^4.$$

A kritikus erő és a biztonsági tényező pedig

$$F_{krit.} = \frac{\pi^2 \cdot I_2 \cdot E}{l^2} = 56548 \text{ N},$$

$$n = \frac{F_{krit.}}{S_2} = 4.85 > 1.$$

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{100\sqrt{1.36}}{i} = 156.24 > \lambda_0, \quad (7.27)$$

ahol $i = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$.

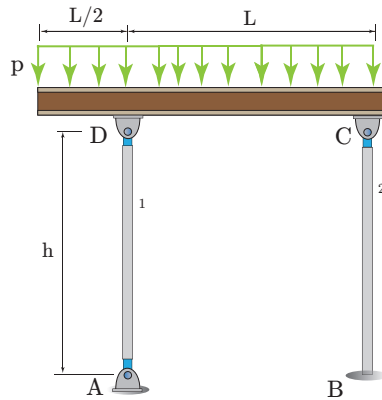
3. Feladat

A prizmatikus, kör keresztmetszetű rudakat megoszló erőrendszer terheli.

(a) Határozza meg az egyes rúd kihajlással szembeni biztonságát a kettes rúdhöz képest!

A kritikus erők számítása

$$F_{kr.1.} = \frac{\pi^2 IE}{h^2}, \quad F_{kr.2.} = \frac{\pi^2 IE}{4h^2}. \quad (7.28)$$



7.9. ábra. Nyomott tartók kihajlása.

Megoldás

A rúderők számítása az egyensúlyi egyenletekből

$$\sum M = 0 \rightarrow p \frac{3l}{2} \frac{3l}{4} - Al \rightsquigarrow A = \frac{9pl}{8},$$

$$\sum F = 0 \rightarrow B = \frac{3pl}{2} - \frac{9pl}{8} = \frac{3pl}{8}.$$

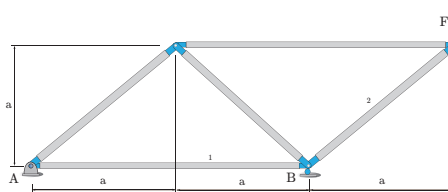
A biztonsági tényezők

$$n_1 = \frac{F_{kr.1.}}{A}, \quad n_2 = \frac{F_{kr.2.}}{B} \rightsquigarrow n_1 = \frac{4}{3}n_2. \quad (7.29)$$

4. Feladat

A prizmatikus, kör keresztmetszetű rudakat koncentrált erő terheli. A rudak azonos átmérőjűek és rugalmassági modulusúak!

(a) Határozza meg az egyes rúd kihajlással szembeni biztonságát a kettes rúdhoz képest!



7.10. ábra. Rácsos szerkezet kihajlása.

Megoldás

A rúderők számítása az egyensúlyi egyenletekből

$$S_1 = -\frac{F}{2}, \quad S_2 = -F\sqrt{2}.$$

7. KIHAJLÁS

A kritikus erők számítása

$$F_{kr.1.} = \frac{\pi^2 IE}{4a^2}, \quad F_{kr.2.} = \frac{\pi^2 IE}{2a^2}. \quad (7.30)$$

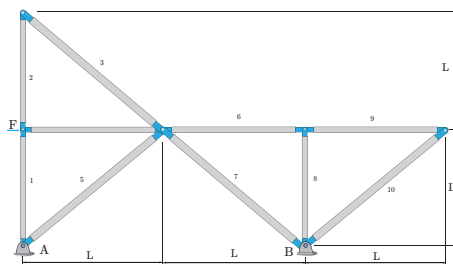
A biztonsági tényezők

$$n_1 = \frac{F_{kr.1.}}{S_1}, \quad n_2 = \frac{F_{kr.2.}}{S_2} \rightsquigarrow n_1 = \sqrt{2}n_2. \quad (7.31)$$

5. Feladat

A prizmatikus, kör keresztmetszetű rudakat koncentrált erő terheli. A rudak azonos átmérőjűek és rugalmassági modulusúak! $E=2.1 \cdot 10^5$ MPa, $n=3$, $d=10$ mm, $\lambda_0=110$, $l=1$ m.

(a) Határozza meg a szerkezet teherbírását, ha a biztonsági tényező n !



7.11. ábra. Rácsos szerkezet kihajlása.

Megoldás

A rúderők számítása az egyensúlyi egyenletekből

$$S_4 = -F, \quad S_7 = -\frac{F}{\sqrt{2}}.$$

A kritikus erők számítása

$$F_{kr.4.} = \frac{\pi^2 IE}{nl^2}, \quad F_{kr.7.} = \frac{\pi^2 IE \sqrt{2}}{n2l^2}. \quad (7.32)$$

A legnagyobb erő

$$F_{kr.7.} < F_{kr.4.} \rightsquigarrow F_{max.} \approx 240 \text{ N}. \quad (7.33)$$

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

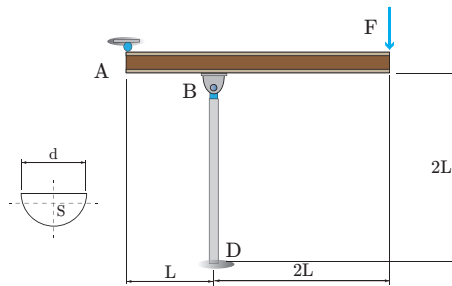
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{1000\sqrt{2}}{i_2} = 564 > \lambda_0, \quad (7.34)$$

ahol $i = \frac{d}{4}$.

6. Feladat

A rudakból álló szerkezetet koncentrált erő terheli. A BD rúd félkör keresztmetszetű. $F = 2000 \text{ N}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $n = 3$, $d = 10 \text{ mm}$, $L = 0.6 \text{ m}$, $\lambda_0 = 110$.

(a) Méretezze az AC rudat kihajlásra!



7.12. ábra. Nyomott tartó kihajlása.

Megoldás

Az egyensúlyi egyenlet alapján

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{BD} \cdot L - F \cdot 3L = 0 \rightarrow F_{BD} = 3F. \quad (7.35)$$

A kritikus erők számítása

$$F_{kr.} = \frac{\pi^2 I_2 E}{4 \cdot 1.2^2} = n \cdot F_{BD} \rightsquigarrow$$

$$I_2 = \frac{n \cdot F_{BD} \cdot 4 \cdot 1.2^2}{\pi^2 E} = 2.63 \text{ cm}^4.$$

A félkör keresztmetszet kisebbik másodrendű nyomatékának számítása

$$I_2 = \frac{\pi r^4}{8} - \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \frac{r^2 \pi}{2} \rightsquigarrow r = 2.2 \text{ cm}. \quad (7.36)$$

7. KIHAJLÁS

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

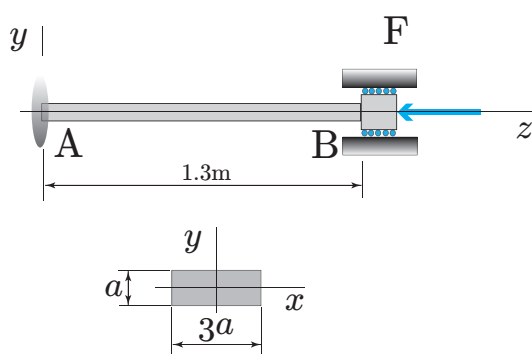
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{240}{i} = 408.1 > \lambda_0, \quad (7.37)$$

ahol $i = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$.

7. Feladat

A rudat koncentrált erő terheli. A rúd téglalap keresztmetszetű. $F = 8000$ N, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $n = 3$, $\lambda_0 = 110$.

(a) Méretezze a rudat kihajlásra!



7.13. ábra. Nyomott tartó kihajlása

Megoldás

$$F_{kr.} = \frac{\pi^2 I_2 E}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = n \cdot F \rightsquigarrow$$
$$I_2 = \frac{3a \cdot a^3}{12} \rightsquigarrow a \approx 12 \text{ mm.}$$

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

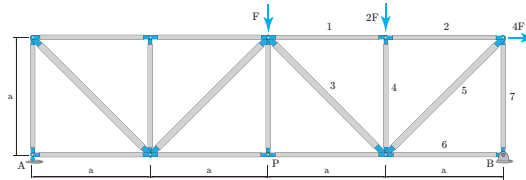
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{2600}{i_2} = 750.55 > \lambda_0, \quad (7.38)$$

ahol $i = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

8. Feladat

Minden rúd azonos körkeresztmetszetű. $F=2 \text{ kN}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $n=4$,
 $\lambda_0=110$, $a=1.2 \text{ m}$.

- (a) Méretezze a legjobban igénybevett rudat kihajlásra ($d=?$)!
 (b) Határozza meg a P pont függőleges elmozdulását y_P !



7.14. ábra. Rácsos tartó

Megoldás

A legnagyobb nyomóerő a 6-os rúdban ébred, $S_6=8 \text{ kN}$.

$$F_{kr.} = \frac{\pi^2 I_2 E}{a^2} = n \cdot S \leadsto$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{n S_6 64 a^2}{\pi^3 E}} = 0.0263 \text{ m,}$$

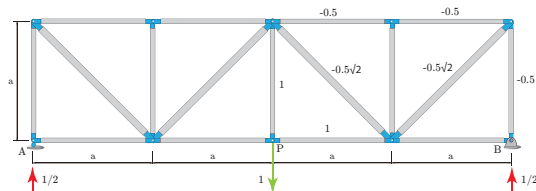
$$i = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \frac{d}{4} \leadsto$$

$$\lambda = \frac{l}{i} = 182.5 \geq 110.$$

A P pont függőleges elmozdulásának számításához az adott pontba az adott irányba egységnyi erőt helyezünk. Csak azokban a rudakban érdemes kiszámolni az erőket amelyekben az eredeti terhelés hatására is ébredt erő.

Megoldás

7. KIHAJLÁS



7.15. ábra. Reakciók és rúderők.

$$\begin{aligned}
 y_P &= \frac{1}{AE} \sum_{i=1}^4 S_i s_i l_i = \\
 &= \frac{1}{AE} \left(-2 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0.5 \cdot 1.2 + \right. \\
 &\quad \left. 2 \cdot 10^3 \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \cdot 1.2 + \right. \\
 &\quad \left. 6 \cdot 10^3 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \cdot 1.2 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot 10^3 \frac{1}{2} \cdot 1.2 \right) = \\
 &= 0.1357 \text{ mm.}
 \end{aligned}$$

9. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet minden rúdja azonos keresztmetszetű és anyagú (A,E). Adott $F = 1000 \text{ N}$, $A = 100 \pi \text{ mm}^2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $l = 1 \text{ m}$.

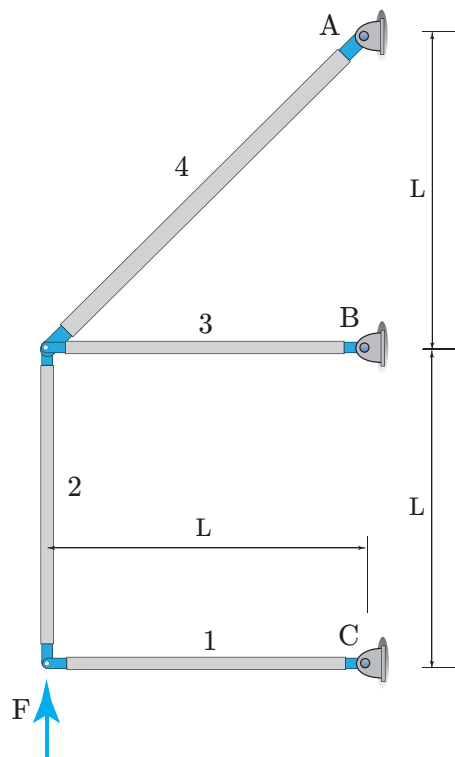
(a) Mekkora a szerkezet kihajlással szembeni biztonsági tényezője?

Megoldás

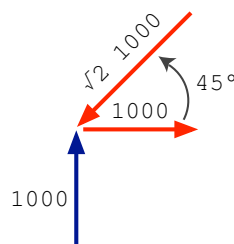
Az 2-3-4 rudak egyensúlya alapján meghatározhatóak a rúderők.

A kettes és a négyes rudak nyomottak, a kisebb biztonsági tényező a négyes rúd esetén áll fenn

$$n = \frac{\sqrt{2}\pi^3}{8}.$$



7.16. ábra. Rácsos szerkezet.



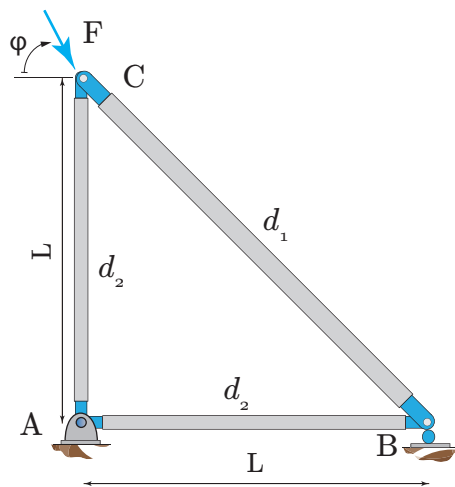
7.17. ábra. Csomópont egyensúlya.

10. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet AB és AC rúdja azonos körkeresztmetszetű és anyagú (d_2, E), a BC rúd pedig d_1 átmérőjű és rugalmassági modulusa (E). Adott $F = 1000 \text{ N}$, $d_1 = 100 \text{ mm}$, $d_2 = 70 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\varphi = 60^\circ$.

(a) Mekkora a szerkezet kihajlással szembeni biztonsági tényezője?

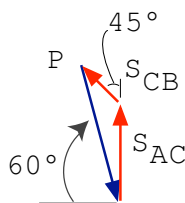
7. KIHAJLÁS



7.18. ábra. Rácsos szerkezet.

Megoldás

A C csomópont egyensúlya alapján számolhatóak a rúderők.



7.19. ábra. Csomópont egyensúlya.

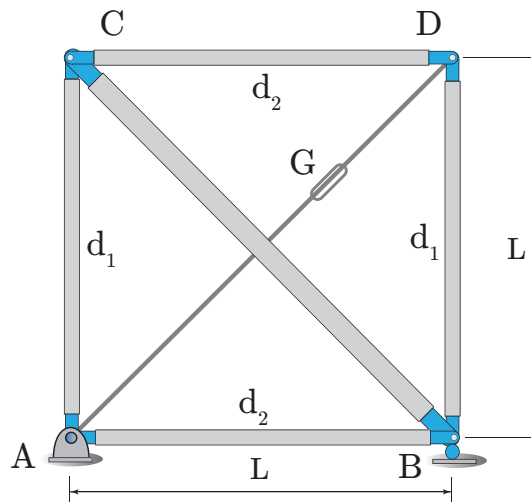
A kisebb biztonsági tényező az AC rúd esetén áll fenn

$$S_{AC} = 500(\sqrt{3} - 1) \text{ N}, \quad n = \frac{\sqrt{2}\pi^3}{8}.$$

11. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet AC és BD rúdja azonos körkeresztmetszetű és anyagú (d_1, E), a CD és AB rúd d_2 átmérőjű, anyaguk azonos (E). Az

AD átlós elemet a G pontban felszerelt menetes szárral feszítjük meg. A kihajlással szembeni minimális biztonsági tényező $n=3$. Adott $d_1 = 10 \text{ mm}$, $d_2 = 15 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$.

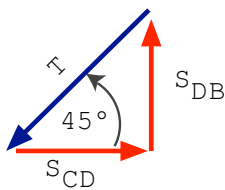


7.20. ábra. Rácsos szerkezet.

(a) Mekkora lehet legfeljebb az AD elemben a húzóerő?

Megoldás

A D csomópont egyensúlya alapján számolhatóak a rúderők.



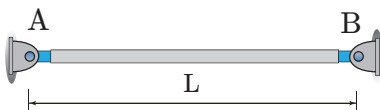
7.21. ábra. Csomópont egyensúlya.

A CD és DB rudakban egyaránt $\frac{T}{\sqrt{2}}$ erő ébred. A kritikus erő és n alapján a CD és AB rudak alapján $T = 1605 \text{ N}$. A kritikus erő és n alapján az AC és BD rudaknál $T = 317 \text{ N}$. A megengedhető maximum a kisebbik erő, vagyis $T = 317 \text{ N}$.

7. KIHAJLÁS

12. Feladat

A vázolt IE merevségű L hosszúságú rúd a két végén csuklós megfogással rendelkezik. A kezdeti hossz L , a hőtágulási együttható α .



7.22. ábra. Kihajlás hőmérsékletváltozás esetén.

(a) Mekkora hőmérséklet emelkedésnél következik be a kihajlás?

Megoldás

A normál feszültség és a hőmérséklet változás kapcsolata miatt

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E\alpha\Delta T.$$

A nyomás miatt a kritikus erő

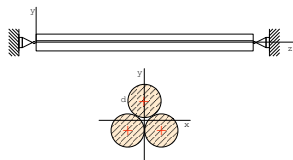
$$F_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 I_2 E.$$

Ezekkel

$$\Delta T = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 I_2}{A\alpha}.$$

13. Feladat

Egy tartó három, azonos körkeresztmetszetű (átmérő d) elemből áll. A hosszuk azonos, L . A rúd két végén csuklós megfogást feltételezzünk!



7.23. ábra. A tartó és a keresztmetszet.

(a) Mekkora a kritikus erő, ha a három rúd önállóan van terhelve?

- (b) Mekkora a kritikus erő, ha a három rúd egybe hegesztve van terhelve?

Megoldás

Amennyiben külön elemként terheljük a rudakat, akkor a kritikus erő

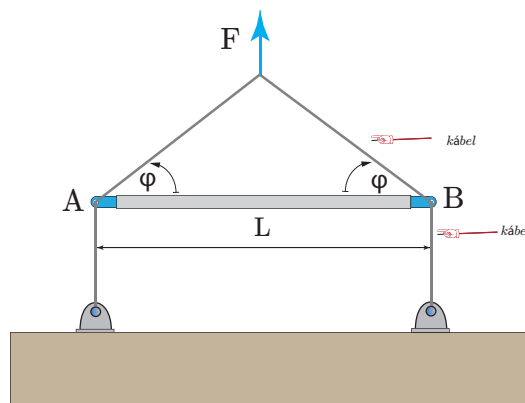
$$F_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 3I_2 E, I_2 = \frac{d^4 \pi}{64}.$$

A keresztmetszet y tengelye szimmetria tengely. Ez egyben a kisebbik főmásodrendű nyomaték tengelye is. Ezért amennyiben egy elemként terheljük a rudakat, akkor a kritikus erő

$$F_k = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 I_y E, I_y = \frac{r^4 \pi}{4} + 2 \frac{5r^4 \pi}{4}.$$

14. Feladat

A vázolt terhet F erővel emeljük fel. A szerkezet AB acél rúdja körgyűrű keresztmetszetű v falvastagsággal, átmérője $d = 80$ mm, $v = 5$ mm, hossza $\overline{AB} = 2.5$ m, $\tan \varphi = 0.7$, $E = 200$ GPa. Kihajlással szembeni biztonsági tényező $n = 3$.



7.24. ábra. Teher emelése.

- (a) Mekkora lehet legfeljebb a teher súlya, W ?

7. KIHAJLÁS

Megoldás

A megadott adatokkal a kritikus erő

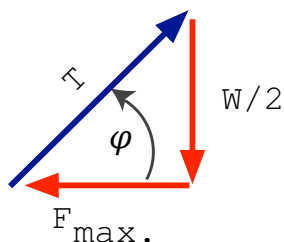
$$F_{kr.} = \left(\frac{\pi}{2500}\right)^2 \frac{(80^4 - 70^4) \pi}{64} E = 8475\pi^3 \text{ N.}$$

A legnagyobb erő pedig

$$F_{max.} = \frac{F_{kr.}}{n}.$$

Az A csomópont egyensúlya alapján

$$T \cos \varphi = F_{max.}, \quad T \sin \varphi = \frac{W}{2}.$$



7.25. ábra. Csomópont egyensúlya.

Ezekkel

$$W = 0.123 \cdot 10^6 \text{ N.}$$

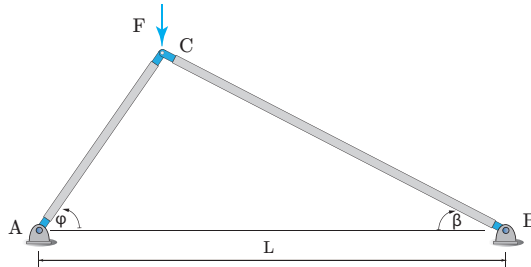
15. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet rúdjai azonos körgyűrű keresztmetszetűek és anyagúak ($d_k = 50 \text{ mm}$, $d_b = 45 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$). Adott $F = 1000 \text{ N}$, $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, $\beta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

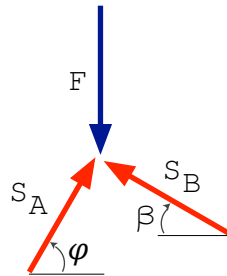
(a) Mekkora a szerkezet kihajlással szembeni biztonsági tényezője?

A C csomópont egyensúlya alapján

$$S_B \sin \beta + S_A \sin \varphi = F, \quad S_A \cos \varphi = S_B \cos \beta.$$



7.26. ábra. Rácsos szerkezet.



7.27. ábra. Csomópont egyensúlya.

Így

$$S_A = 500\sqrt{3} \text{ N}, S_B = 500 \text{ N}.$$

A biztonsági tényező a BC rúd esetén kisebb, $n = 555.37$.

16. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet AB rúdja téglalap keresztmetszetű. A B csuklóban egy koncentrált erő terheli. A kihajlással szembeni biztonsági tényező $n = 4$.

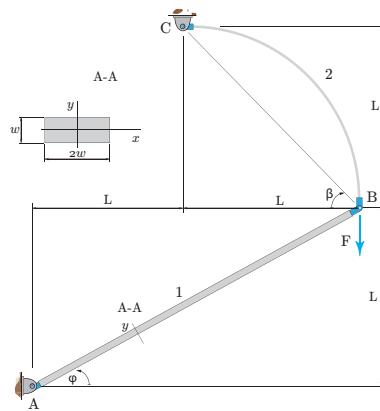
(a) Mekkora lehet legfeljebb F értéke?

Megoldás

A szögek (φ , β) a geometriából számolhatóak. A B csomópont egyensúlya alapján

$$S_1 \sin \varphi + S_2 \sin \beta = F, S_1 \cos \varphi = S_2 \cos \beta.$$

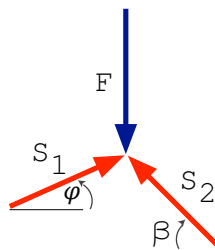
7. KIHAJLÁS



7.28. ábra. Rácsos szerkezet.

Így

$$S_1 = 0.7453F, S_2 = 0.9428F.$$



7.29. ábra. Csomópont egyensúlya

Az egyes nyomott rúd esetén az x tengelyre számított másodrendű nyomaték a kisebb, ezzel a kritikus erő

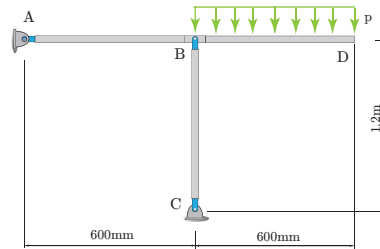
$$F_{kr.} = \left(\frac{\pi}{a\sqrt{5}} \right)^2 I_x E.$$

A legnagyobb erő $F_{max.} = \frac{F_{kr.}}{n}$ lehet. Ezekkel a terhelés F legnagyobb értéke

$$S_1 = \frac{F_{kr.}}{4} \rightarrow F = \frac{0.11w^4 E}{a^2}.$$

17. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet BC rúdja kör (d) keresztmetszetű, mely az AD rúdhoz csuklósan csatlakozik. Adott $d=50\text{ mm}$, $E=2 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $\lambda_0=95$.



7.30. ábra. Rácsos szerkezet.

(a) Mekkora lehet legfeljebb p értéke?

Megoldás

A BC rúd nyomott, tehát szükséges a rúdban ébredő erő. Az A pontba felírt nyomatéki egyenlet alapján

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 600F_{BC} = 900 \cdot 600p \rightarrow F_{BC} = 900p. \quad (7.39)$$

A kritikus erő a rúdban számolható Euler alapján

$$F_{kr.} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} = \frac{\frac{50^4 \pi}{64} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \pi^2}{1200^2} = 900p \rightarrow p = 467.3\text{ N/mm}. \quad (7.40)$$

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

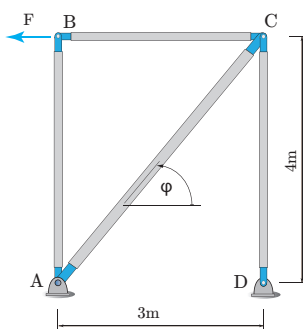
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{1200}{d/4} = 96 > \lambda_0. \quad (7.41)$$

18. Feladat

A vázolt rácsos szerkezet minden rúdja kör (d) keresztmetszetű. Adott $d=50\text{ mm}$, $E=2 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $\lambda_0=100$.

(a) Mekkora lehet legfeljebb F értéke?

7. KIHAJLÁS



7.31. ábra. Rácsos szerkezet.

Megoldás

Az AC rúd nyomott, tehát szükséges a rúdban ébredő erő. A C pontba felírt erőegyensúly alapján

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F = F_{AC} \cdot \cos \varphi \rightarrow F_{AC} = \frac{5}{3} F. \quad (7.42)$$

A kritikus erő a rúdban számolható Euler alapján

$$F_{kr.} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} = \frac{\frac{50^4 \pi}{64} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \pi^2}{5000^2} = 24224 \text{ N} = \frac{5}{3} F \rightarrow F = 14534 \text{ N}. \quad (7.43)$$

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

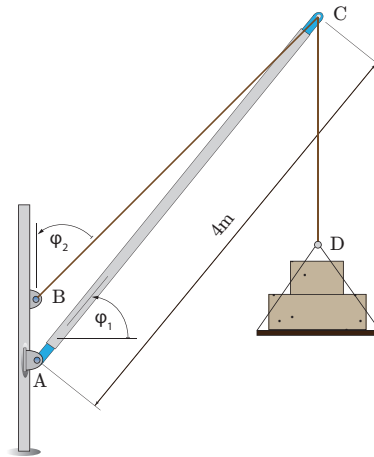
$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{5000}{d/4} = 400 > \lambda_0. \quad (7.44)$$

19. Feladat

A vázolt szerkezet AC rúdja kör (d) keresztmetszetű. A D pontba rögzített m tömeget tartunk. Adott $m=500 \text{ kg}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\lambda_0=1000$, $n=2$, $\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$.

- (a) Mekkora a legkisebb szükséges rúdátmérő, ha a biztonsági tényező kihajlással szemben n ?

Megoldás

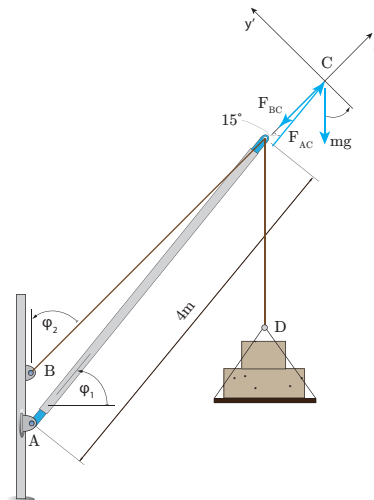


7.32. ábra. Teher emelése.

A rúdban ébredő erő az A pontba az $x' - y'$ koordinárendszerben felírt erőegyensúly alapján

$$\sum F_{y'} = 0 \rightarrow F_{AC} \cdot \sin 15^\circ = mg \cdot \cos 45^\circ \rightarrow F_{AC} = 13400.71 \text{ N.} \quad (7.45)$$

A kritikus erő a rúdban számolható Euler alapján



7.33. ábra. Az egyensúly a C pontban.

$$F_{kr.} = nF_{AC} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} = \frac{\frac{d^4 \pi}{64} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \pi^2}{4000^2} = 26801.42 \text{ N} \rightarrow d = 45.87 \text{ mm.} \quad (7.46)$$

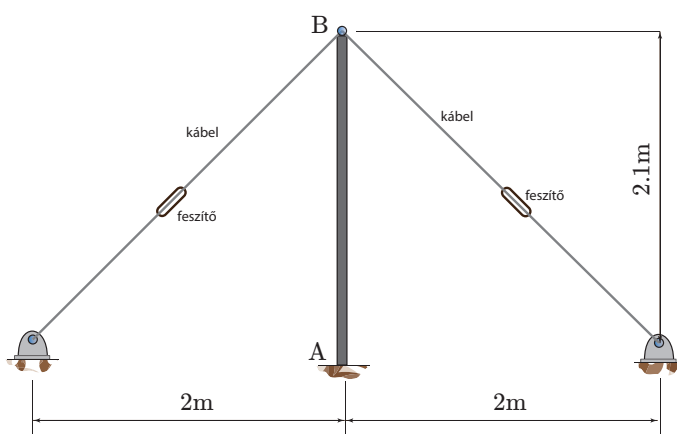
7. KIHAJLÁS

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{4000}{d/4} = 348.8 > \lambda_0. \quad (7.47)$$

20. Feladat

A vázolt AB oszlopot beton alapba helyeztek és a felső pontját két kábel feszíti szimmetrikusan. Az oszlop $d=40$ mm-es külső átmérőjű, $v=5$ mm-es falvastagságú cső. $E=2 \cdot 10^5$ MPa, $\lambda_0=100$, $n=3$.



7.34. ábra. Tartó feszítése.

- (a) Mekkora a legnagyobb feszítő erő a kábelekben (F_k), ha kihajlással szemben a biztonsági tényező n ?

Megoldás

A kritikus erő a rúdban számolható

$$F_{kr.} = \frac{\pi^2 EI_2}{l^2} = \frac{\frac{(d^4 - (d-2v)^4)\pi}{64} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \pi^2}{0.7^2 \cdot 2100^2} = 78.67 \text{ kN} \rightarrow F_{max.} = \frac{F_{kr.}}{n} = 26.22 \text{ kN}. \quad (7.48)$$

A B csomópont egyensúlya (függőleges irány) alapján

$$\sum F = 0 \quad F_{max.} - 2 \cdot F_k \frac{2.1}{2.9} = 0 \rightarrow F_k = 18.1 \text{ kN}. \quad (7.49)$$

Az Euler képlet igaz, ha $\lambda > \lambda_0$,

$$\lambda = \frac{l}{i} = \frac{0.7 \cdot 2100}{\sqrt{\frac{I_2}{A}}} = 117.6 > \lambda_0. \quad (7.50)$$

komposit, 1

α	hőtágulási együttható, page 18
σ	feszültség tenzor mátrixa, page 124
ΔT	hőmérséklet változás, page 19
λ_0	határ karcsúsági tényező, page 191
λ	hosszváltozás, page 5
\mathbb{A}	középvonal által határolt terület, page 84
ν	Poisson tényező, page 4
ϕ	keresztmetszet elfordulása, page 85
σ	normálfeszültség, page 7
$\sigma_{meg.}$	megengedett feszültség, page 60
τ	csúsztatófeszültség, page 85
ε	fajlagos hosszváltozás, page 2
$F_{krit.}$	kritikus erő Euler szerint, page 191
I_p	poláris másodrendű nyomaték, page 86

TÁRGYMUTATÓ

- $P(x)$ Lagrange interpolációs polinom, page 141
- S_x, S_y statikai vagy elsőrendű nyomaték, page 94
- A keresztmetszet, page 7
- E rugalmassági modulus, page 5
- F koncentrált erő, page 5
- G rugalmassági modulus, page 88
- I másodrendű nyomaték, page 59
- i inerciasugár, page 191
- K keresztmetszeti tényező, page 68
- M nyomaték, page 9
- n biztonsági tényező, page 191
- R görbületi sugár, page 60
- r Mohr kör sugara, page 124
- S rúderő, page 9
- S.T. semleges tengely, page 65
- T csavarónyomaték, page 85
- V nyíró igénybevétel, page 94
- w keresztmetszet szélessége, page 94